

**UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE
COMPOSTELA**

FACULDADE DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA, GRUPO DE
FÍSICA NO LINEAL

**ESTUDIO DE LA HIDRODINÁMICA DE LA
RÍA DE VIGO MEDIANTE UN MODELO DE
VOLÚMENES FINITOS**

Pedro Montero Vilar
Julio, 1999

D. Vicente Pérez Villar, Profesor Catedrático del Departamento de Física de la Materia Condensada de la Universidad de Santiago de Compostela,

INFORMA:

Que la presente memoria titulada “Estudio de la Hidrodinámica de la Ría de Vigo mediante un Modelo de Volúmenes Finitos“, ha sido realizada, bajo mi dirección, por D. Pedro Montero Vilar, en el Grupo de Física No Lineal del Departamento de Materia Condensada, para optar al grado de Doctor en Física.

Santiago, Julio 1999

Prof. Vicente Pérez Villar

A mi familia.

Sedia-m´eu na ermida de San Simi3n
e cercarin-mi-as ondas que grandes son.

Meendinho (trovador galaico-portugu3s, S.XIII)

Agradecimientos

Aunque es posible que los agradecimientos de una tesis sean lo primero que se lea, también es cierto que son lo último que se escribe, o por lo menos eso ha sido así en mi caso. Ha llegado ya el momento de recostarse para atrás en la silla y comenzar a recordar todos los buenos momentos de estos años y a la gente que ha logrado que fuesen así, y que también ha estado ahí apoyándome cuando no eran tan buenos. A todos me gustaría darles las gracias y entre ellos, que son muchos, me gustaría nombrar a algunos.

Al Prof. Vicente Pérez Villar, por admitirme en su grupo en un momento en el que parecía que se me cerraban todas las puertas, y por apoyarme más tarde en mi proyecto de investigación.

Al Prof. Ramiro Neves, por permitirme trabajar en el grupo de investigación que dirige en el Instituto Superior Técnico de Lisboa, por enseñarme tantas cosas sobre los modelos numéricos, por darme una visión física de estos y sobre todo por hacerlo de una forma divertida.

Al Prof. Moncho Gómez Gesteira, por ayudarme en aquello que más me costaba: a mantenerme en una línea de trabajo y no dejarme llevar por mi natural dispersión mental.

Al Prof. Vicente Pérez Muñuzuri, por ayudarme con los ordenadores, con la física de fluidos y con la turbulencia, así como por el apoyo incondicional mostrado durante estos años.

A Juan Taboada Hidalgo, por todo en general y en particular por saber hacer las cosas más fáciles, por su amistad y por todos estos años de trabajo en equipo. Espero que sean muchos más.

A Flavio Martíns, por ayudarme a sumergirme en el océano de subrutinas del modelo y por las grandes conversaciones que manteníamos cuando éstas nos dejaban.

A Manolo Ruiz Villarreal, por su mirada crítica frente a cualquier planteamiento, por su ojo clínico ante los problemas y por su paciencia conmigo a la hora de discutirlos. También por la cantidad de veces que nos reímos juntos como hacían los chicos de la Caleta.

Al resto de mis compañeros, por hacer de unas cuantas personas con diferentes objetivos un verdadero grupo de investigación

trabajando en equipo: a Alberto, Carlos, Chus, Elena, Gonzalo, Héctor, Inés, Irene, Iván, Julio, Maite y Mónica, por su buen humor, por hacerme pasar momentos inolvidables y por aguantar mis pobres dotes oratorias y musicales. Entre todos ellos, me gustaría destacar a Nieves, por ayudarme en la representación gráfica de los resultados, de la que a veces se preocupaba más que yo mismo. A Adolfo, Diego y Edu, por el aire fresco que aportan. Y en especial a Bea, de la que he aprendido tanto en tan poco tiempo.

A José Chambel Leitão y a Adelio Silva, mis primeros anfitriones en Lisboa, por su acogida y confianza en mí. A toda la gente del Instituto Superior Técnico de Lisboa y en especial a Aires, Helder, Henrique, João Pedro, Paulo y Ricardo, por la ayuda y el cariño prestados tanto cuando estaba en Lisboa como también después. A Fátima, Artur, Bruno y Jorge Espinha, mi familia lisboeta de Telheiras, por hacerme sentir como en casa. También quiero agradecer a la gente de Defensores de Chaves, inquilinos o no, con la que pasé tantos momentos agradables. Me gustaría incluir aquí también a todas las personas que me he encontrado en mis estancias en Portugal y las hicieron inolvidables. A todas, obrigado.

A Ricardo Prego y a su grupo del C.S.I.C., por enseñarme, entre otras cosas, el mar en la investigación marina. A Manolo Varela y a la tripulación del B/O MYTILUS, por su buena compañía en las noches frías y mañanas lluviosas de fondeo.

A Guillermo Díaz del Río y a Juan Alonso Santiago (Instituto Español de Oceanografía) por su colaboración en la adquisición de datos de campo y por toda la ayuda generosamente prestada.

Anxa, Bea, Elena, David, Marcos, Nano, Roco y un montón de amigos más me han estado apoyando en todo momento durante estos años. A estas y a todas las personas que me aguantaron todos mis agobios cuando se cerraba la puerta del departamento y me dieron tantas alegrías y ánimos en estos años, muchas gracias por vuestra amistad.

Aunque aparezcan de últimos, ellos saben que son los primeros. Por acercarme al mar desde pequeño, por enseñarme cosas que no van a aparecer nunca publicadas en una revista científica, por ponerme los pies en la tierra y por su día a día incondicional, querría darle las gracias a mis padres y a mi familia.

Me gustaría hacer también mención especial a todas aquellas instituciones que han apoyado mi labor durante estos años: a la Consellería de

Educación e Ordenación Universitaria de la Xunta de Galicia, al Vicerrectorado de Investigación de la Universidad de Santiago de Compostela y a los proyectos:

OMEXII, financiado por el Programa de las Comunidades Europeas en Ciencia y Tecnología Marina (MASTIII).

Ordenación Integral del Espacio Marítimo Terrestre de Galicia, financiado por la Consellería de Pesca de la Xunta de Galicia.

Índice de Contenidos

1	INTRODUCCIÓN	16
1.1	IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DE LA HIDROGRAFÍA DE LA RÍA DE VIGO.....	16
1.2	INTRODUCCIÓN HISTÓRICA A LA HIDROGRAFÍA DE LA RÍA DE VIGO.....	17
1.3	INTRODUCCIÓN A LA MODELIZACIÓN DE LAS RÍAS.	18
1.4	OBJETIVO Y DESARROLLO DE LA MEMORIA.....	19
2	ÁREA DE ESTUDIO: LA RÍA DE VIGO	20
2.1	INTRODUCCIÓN	20
2.2	CONDICIONES METEOROLÓGICAS DE LA RÍA DE VIGO	22
2.3	APORTES FLUVIALES	23
2.4	HIDROGRAFÍA DE LA RÍA DE VIGO	25
	2.4.1 <i>Caracterización de la marea en la Ría de Vigo</i>	26
	2.4.2 <i>Las masas de agua costera frente a la Ría de Vigo</i>	31
	2.4.3 <i>Circulación estuárica. Distribución de salinidad y temperatura</i>	32
	2.4.4 <i>Clasificación estuárica de la Ría de Vigo</i>	35
3	DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL SISTEMA	38
3.1	INTRODUCCIÓN	38
3.2	ECUACIONES DEL SISTEMA: ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS.	39
	3.2.1 <i>Ecuaciones de conservación</i>	39
	3.2.2 <i>Transformaciones y aproximaciones</i>	39
	3.2.3 <i>Sistema de ecuaciones para aguas poco profundas</i>	44
3.3	MODELIZACIÓN DE LA TURBULENCIA.....	46
	3.3.1 <i>Modelización de la turbulencia horizontal</i>	48
	3.3.2 <i>Modelización de la turbulencia vertical</i>	49
	3.3.3 <i>Modelización de la difusividad turbulenta</i>	51
3.4	LA IMPORTANCIA DE LA COORDENADA VERTICAL.....	52
4	RESOLUCIÓN NUMÉRICA	56
4.1	INTRODUCCIÓN	56
4.2	PROPIEDADES Y RESTRICCIONES DE LA DISCRETIZACIÓN	57
4.3	DISCRETIZACIÓN ESPACIAL	58
4.4	DISCRETIZACIÓN TEMPORAL.....	60
4.5	RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS	61
	4.5.1 <i>Elevación de la superficie libre</i>	62
	4.5.2 <i>Velocidad horizontal</i>	69
	4.5.3 <i>Velocidad vertical</i>	71
	4.5.4 <i>Densidad</i>	73

5	CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA.....	75
5.1	INTRODUCCIÓN	75
5.2	CONDICIONES INICIALES.....	76
5.3	CONDICIONES EN LA SUPERFICIE.....	76
5.4	CONDICIONES EN EL FONDO.....	78
5.5	FRONTERAS CERRADAS	79
5.6	FRONTERAS MÓVILES.....	80
5.7	FRONTERAS ABIERTAS.....	81
	5.7.1 <i>Condición de Dirichlet</i>	83
	5.7.2 <i>Condición de Neumann</i>	85
	5.7.3 <i>Condición de radiación</i>	86
	5.7.4 <i>Mallas acopladas: Submodelo</i>	97
	5.7.5 <i>Condición para la Temperatura y la Salinidad</i>	105
6	APLICACIÓN Y RESULTADOS.....	106
6.1	APLICACIÓN AL ÁREA DE ESTUDIO: LA RÍA DE VIGO	106
6.2	SIMULACIÓN DE LA CORRIENTE DE MAREA.	108
6.3	SIMULACIÓN DE LA CORRIENTE DE MAREA Y VIENTO	112
6.4	SIMULACIÓN BAROCLÍNICA	123
6.5	CORRIENTE RESIDUAL	139
6.6	SIMULACIÓN DE AFLORAMIENTO LOCAL.....	146
6.7	SIMULACIÓN EN UNA SUBÁREA DE INTERÉS.....	149
7	CONCLUSIONES	153
	BIBLIOGRAFÍA.....	156
	NOTACIÓN	170

RESUMEN

La Ría de Vigo es una entrada del mar en la tierra situada al Noroeste de la Península Ibérica. La circulación dentro de la ría está dominada por los movimientos mareales. A estos movimientos subyace un transporte de período más largo provocado por otro tipo de forzamientos como pueden ser las diferencias en el campo de densidad. Diversos índices indican el tipo de circulación que existe en la Ría de Vigo.

En esta memoria se describe la hidrodinámica de la Ría de Vigo a través de la utilización de un modelo numérico que resuelve las ecuaciones de conservación de un fluido marino. El modelo discretiza estas ecuaciones a través de la técnica de los volúmenes finitos. Esto permite el utilizar una coordenada vertical generalizada que puede adaptarse mejor a los dominios a simular.

Se dedica una especial atención a las condiciones de contorno en las fronteras abiertas, debido a que la correcta simulación de distintos fenómenos dentro de la ría está condicionada por la buena imposición de éstas. Dentro de estas condiciones se presta gran detalle a la condición de radiación forzada, debido a la complejidad en su implementación. También se desarrolla el módulo que posibilita acoplar el modelo general a un submodelo, que reproduciría un área de interés.

Una vez descrito el modelo se procede a la calibración y simulación de diferentes tipos de circulación que se dan dentro de la ría, intentando hacer una descripción de cada uno de ellos.

La primera aplicación del modelo consiste en la simulación de la corriente barotrópica integrada en vertical. El forzamiento se realiza a través de la imposición de la superficie libre en la frontera que limita con el océano. Los resultados de la superficie libre son comparados con las medidas de tres mareógrafos situados a lo largo de la ría.

Una segunda aplicación simula la corriente inducida por la marea y por un viento variable obtenido de una estación meteorológica. El modelo reproduce la distribución vertical de las velocidades forzadas por estas dos causas. Los resultados fueron calibrados utilizando datos de corriente en toda la columna vertical de un punto dentro del dominio a simular.

En tercer lugar, se ha realizado una aplicación donde la marea y el forzamiento debido a la distribución del campo de salinidad y temperatura correspondiente a una situación típica de invierno. En ella se ha comprobado la existencia de una corriente residual en doble capa, donde un frente de agua menos salada se mantiene en superficie.

Se calcula además, en una cuarta aplicación, la corriente residual para tres situaciones típicas donde la marea y el forzamiento baroclínico debido a los aportes fluviales y a la frontera con el océano son las causas principales del movimiento del agua. Los flujos obtenidos se comparan con los resultantes de un modelo de cajas.

Finalmente, las dos últimas aplicaciones consisten en una situación de microafloramiento dentro de la ría forzada por un viento de componente Norte y la simulación de la corriente barotrópica dentro del puerto de Bouzas usando el módulo del submodelo y obteniendo las condiciones de frontera del modelo de la Ría de Vigo.

Capítulo 1

1 Introducción

1.1 Importancia del estudio de la hidrografía de la Ría de Vigo

Las zonas costeras, y en particular los estuarios, son los lugares donde se sitúan los mayores asentamientos humanos, tanto de tipo urbano como industrial. Al mismo tiempo, en estas áreas existe un frágil equilibrio entre dos medios, las aguas interiores y las oceánicas, que da lugar a que se concentre en ellas una gran biodiversidad. En particular, la Ría de Vigo posee en sus costas la mayor densidad de población de Galicia, con el mayor centro urbano, Vigo, y una gran área industrial. Por otra parte, la acuicultura (mejillón, almeja, ostra,...) y la pesca son actividades de gran importancia en la zona. No se debe despreciar la relevancia del sector turístico que, por una parte, da lugar a un aumento de la presión demográfica, sobre todo en la época estival, y por otra, conduce a una

progresiva atención al cuidado del medio ambiente. Se hace, por tanto, necesaria la aplicación de políticas que protejan el desarrollo sostenible de la zona, partiendo de estudios previos que abarquen la globalidad y complejidad del problema. Es preciso también el seguimiento de la presión antropogénica en la Ría de Vigo a lo largo del tiempo y de la aplicación y resultados de estas políticas de protección.

Dentro del estudio global, el comienzo consiste en el conocimiento hidrográfico de la zona donde los procesos químicos y biológicos van a tener lugar. El transporte de sustancias y especies químicas, el intercambio de las masas de agua entre distintas partes de la ría y con el exterior, la modificación de la circulación del agua, tanto producida por causas naturales como humanas, la capacidad de renovación del agua de la ría, etc. son el primer eslabón en el acercamiento científico al problema.

1.2 Introducción histórica a la hidrografía de la Ría de Vigo

El conocimiento de la hidrografía de la Ría de Vigo comienza a tomar importancia en los años cincuenta como complemento necesario a los estudios biológicos sobre el fitoplancton (Durán *et al.*, 1956), sobre las mareas rojas (Margalef, 1956) y sobre la entrada de sardina en la ría (Margalef & Andreu, 1958). Sin embargo, y dada su importancia, ya en ese momento la hidrografía de la Ría de Vigo y de la plataforma adyacente empieza a ser investigada por sí misma. En un principio, los estudios se centran en la circulación debida a la marea y su capacidad de transporte (Saiz *et al.*, 1957; Saiz *et al.*, 1961; Anadón *et al.*, 1961). Las conclusiones de estos estudios adolecen de simplicidad y desconocimiento de causas determinantes de la circulación, como por ejemplo el afloramiento de agua procedente de capas subsuperficiales del Océano Atlántico. No obstante, es encomiable el esfuerzo realizado en la adquisición de datos hidrográficos. Es precisamente en esta toma de datos donde se centran muchos trabajos posteriores (Fraga, 1967), junto con la descripción de la circulación residual para descubrir un esquema general de circulación en las Rías Baixas y su plataforma adyacente (Otto, 1975). En este momento, tiene especial importancia la atribución de la presencia de aguas frías en los meses de verano al afloramiento costero (Molina, 1972), y la influencia de éste en la circulación de doble capa en las rías (Fraga & Margalef, 1979). A partir de este momento, la hidrografía de la Ría de Vigo fue descrita desde un punto de vista cualitativo y cuantitativo de forma intensiva (Mouriño & Fraga, 1982; Pazó *et al.*, 1984; Mouriño *et al.*, 1984; Nombela, 1989; Nombela & Vilas, 1991;

Nombela *et al.*, 1992; Romero & Prego, 1995), así como la influencia de la plataforma a través del afloramiento costero en la ría y el intercambio de aguas entre los dos sistemas (Iglesias *et al.*, 1984; Blanton *et al.*, 1984; Blanton *et al.*, 1987; Fraga & Prego, 1989; Prego *et al.*, 1990; Prego, 1992; Álvarez-Salgado *et al.*, 1993; Nogueira *et al.*, 1997; Doval *et al.*, 1998). Además, en estos años se ha propuesto la posible influencia de períodos alternantes de *downwelling-upwelling* en la aparición de mareas rojas en las rías (Fraga *et al.*, 1988; Fraga & Prego, 1989; Tilstone *et al.*, 1994). Al mismo tiempo, se han estimado las corrientes residuales desde un punto de vista cuantitativo a través de los llamados modelos de cajas y deducidos los tiempos de residencia del agua en la ría (Prego & Fraga, 1992).

1.3 Introducción a la modelización de las rías.

Los modelos de cajas se basan en el balance de masa y sal entre diferentes zonas del estuario, siendo estimados estos balances a partir de medidas *in situ*. No deben confundirse con los modelos numéricos del ambiente marino, los cuales se basan en la resolución de las ecuaciones de balance de un fluido asistida por medios computacionales. Este tipo de modelos constituye una potente herramienta para el estudio del medio marino, tanto para diagnóstico como pronóstico de la hidrodinámica. Los modelos numéricos han tenido un desarrollo extraordinario en las últimas décadas debido en gran parte a la evolución experimentada por los medios informáticos. Una de las consecuencias de este aumento en la rapidez de cálculo y en la memoria disponible, ha consistido en el uso cada vez más frecuente de modelos tridimensionales, sin olvidar los modelos bidimensionales que siguen siendo utilizados con gran éxito. Numerosos ejemplos de unos y otros pueden encontrarse en la bibliografía (Leendertsee, 1967; Heaps, 1969; Abbott *et al.*, 1973; Falconer, 1984; Backhaus, 1983; Blumberg & Mellor, 1983; Nihoul, 1984; Neves, 1985; Santos, 1995).

Algunas Rías Gallegas han sido abordadas por diferentes autores usando modelos numéricos. Pascual (1987a, 1987b) ha tratado la circulación producida por la marea y el viento en la Ría de Arousa con un modelo 2D de diferencias finitas. Usando también un modelo bidimensional pero de elementos finitos y volúmenes finitos, Bermúdez *et al.* (1991, 1994, 1998) llevaron a cabo diferentes estudios en las Rías de Pontevedra y Vigo. Montero *et al.* (1992) analizaron la dispersión de contaminantes en el área del puerto de Vigo con un modelo euleriano de diferencias finitas. Más recientemente, algunos autores han usado modelos lagrangianos de dispersión acoplados a modelos hidrodinámicos para diferentes rías (Montero *et al.*, 1997; Gómez-Gesteira *et al.*, 1999; Montero

et al., 1999). Taboada *et al.* (1998) aplicaron un modelo 3D para el estudio de la circulación residual en Vigo.

1.4 Objetivo y desarrollo de la memoria

En este trabajo se ha pretendido cumplir un doble objetivo. Por una parte, se ha desarrollado y depurado conjuntamente con el equipo de investigación un modelo tridimensional de simulación hidrodinámica, prestando especial atención en los procesos implicados en las condiciones de frontera abierta. El segundo objetivo ha sido la aplicación del modelo para el estudio de la hidrodinámica de la Ría de Vigo en diferentes situaciones, con la correspondiente calibración y validación del modelo.

En el siguiente capítulo se describe brevemente la Ría de Vigo, con especial atención en su clasificación estuárica. Para ello, se utilizan distintos índices que caracterizan el tipo de circulación existente en la ría. En el capítulo tercero se comenta el sistema de ecuaciones que describe el sistema físico del medio marino general, haciendo hincapié en las aproximaciones y transformaciones que se consideran. Además se trata el problema del cierre de la turbulencia, así como la importancia del sistema de coordenadas vertical utilizado. El cuarto capítulo explica la discretización y resolución numérica del sistema de ecuaciones. Un estudio de los algoritmos computacionales que describen las condiciones de contorno desarrolladas e implementadas en el modelo se hace en el capítulo quinto, poniendo especial atención a las condiciones en la frontera abierta. El capítulo sexto está dedicado a la calibración y validación del modelo en la Ría de Vigo y su aplicación a diferentes situaciones que se dan en ésta: debida a la marea, debida al viento y debida a un forzamiento baroclínico. También se simula una situación de microfloramiento en la ría así como la circulación de marea en un área de interés dentro de ésta. En el último capítulo se recogen las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

2 Área de Estudio: La Ría de Vigo

2.1 Introducción

Desde que, a finales del siglo XIX, es recogida por Ferdinand von Richthofen la palabra ría como concepto científico (Richthofen, 1886), la definición de este tipo de formación costera ha sido causa de una polémica que ha llegado hasta la actualidad. En el presente estudio se usará el nombre de ría para designar una bahía más larga que ancha, la cual debe ser prolongación, al menos parcialmente, de un sistema hidrográfico. Posee una parte alta con carácter de valle fluvial anegado y zonas intermedias con vertientes de origen no fluvial (Nonn, 1966).

La Ría de Vigo es la más meridional de las Rías Gallegas, situándose alrededor de la latitud de 42° 17'N y la longitud de 8° 45'W. Su cuenca es geológicamente una fosa tectónica formada por dos fallas que se alinean de

Norte a Sur y de Nordeste a Sudoeste respectivamente, al igual que el resto de las Rías Baixas. Posee un área de 156 km^2 , con una capacidad de 3257 Hm^3 y una profundidad media de 21 m. Su boca se encuentra interrumpida por las Islas Cíes, lo cual da origen a tres accesos al océano. El más amplio y profundo es la Boca Sur, de 5 km de anchura y 45 m de fondo en marea baja. La Boca Norte posee una extensión de 2.5 km y 23 m de profundidad. Además una pequeña entrada de 7.2 m de profundidad se abre entre las dos islas. El eje principal de la ría se encuentra situado en dirección ENE-WSW y su longitud a lo largo de ésta es de aproximadamente 30 km.

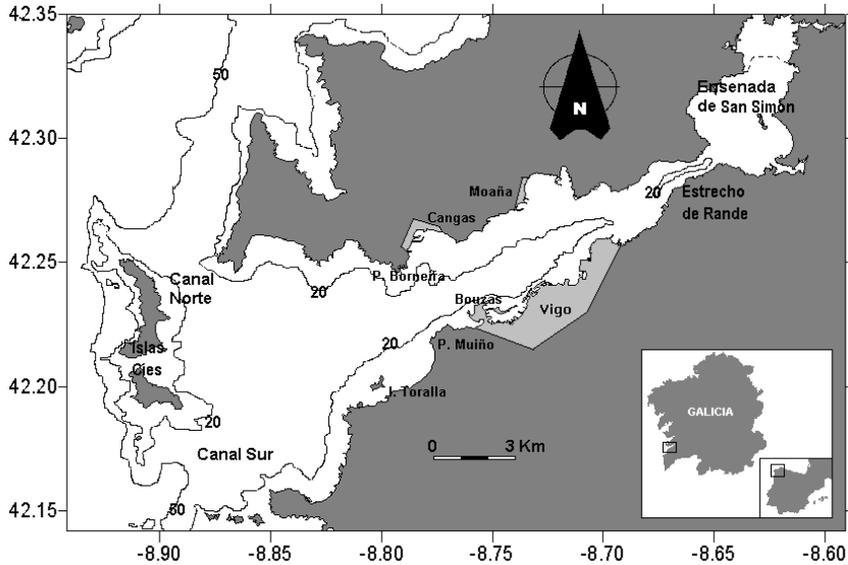


Figura 2.1: Mapa de la Ría de Vigo.

Desde el punto de vista morfológico (figura 2.1), la Ría de Vigo se compone de dos partes bien definidas, que son la Ensenada de San Simón y el resto de la ría. La primera, situada al fondo de la ría, consiste en una amplia cubeta colmada casi completamente de sedimentos, la cual posee aproximadamente un tercio de la superficie sobre el nivel del mar en la marea más baja. La segunda parte se une a la primera por el Estrecho de Rande, de 700 m de ancho, a partir del cual la Ría de Vigo se va ensanchando progresivamente hacia la boca con bastante regularidad. Tanto en el Estrecho de Rande como en la angostura que ocurre entre Punta Borneira y Punta do Muíño se producen hundimientos del fondo, llegando a alcanzar en el primero profundidades de 29m.

2.2 Condiciones meteorológicas de la Ría de Vigo

La variación estacional que experimenta la distribución de las presiones atmosféricas desempeña un papel fundamental en la climatología de la zona, estando afectada por los cambios de posición que tiene el anticiclón de las Azores. En invierno, la normal localización del anticiclón de las Azores en el Noroeste de la costa africana, y de un centro de bajas presiones en Groenlandia, hace que sople en Galicia un flujo de aire del SW. A partir de Junio, el reforzamiento del anticiclón de las Azores y su desplazamiento al oeste induce un viento en las costas gallegas de componente N (Blanton *et al.*, 1987). Los vientos que se presentan en la provincia de Pontevedra tienen una velocidad media anual de 3 m s^{-1} , predominando casi por igual (25-30 %) los períodos de calma y vientos de componente N y SW, como se muestra en la figura 2.2.

Además de esta situación media, se ha comprobado que, durante períodos en los que la radiación solar es importante, hay que considerar la influencia del fenómeno de brisas y vientos catabáticos cuya dirección es paralela al eje de la ría debido a su forma de valle (Chase, 1975; Batten *et al.*, 1992).

El clima de Vigo se halla favorablemente influenciado por la corriente de Canarias, rama sur de la Corriente del Golfo, que se inicia precisamente frente a las costas gallegas. De acuerdo con los datos de precipitaciones y grado de humedad del aire, la Ría de Vigo tiene un clima, según la clasificación de Koeppen (Terán *et al.*, 1978), situado entre los límites de los tipos Cfb y Csb. Ambos pueden definirse como de clima lluvioso templado. Corresponde al primero de los dos tipos citados por la característica de humedad persistente y al segundo por el tiempo húmedo en verano. El régimen de lluvias es de tipo Mediterráneo marítimo, con precipitaciones abundantes en otoño, invierno y primavera y estación seca en verano. En la figura 2.3 se muestra el gráfico de lluvia media mensual de 1932 a 1952. Esta curva es de tipo Lisboa (Romero & Prego, 1995)

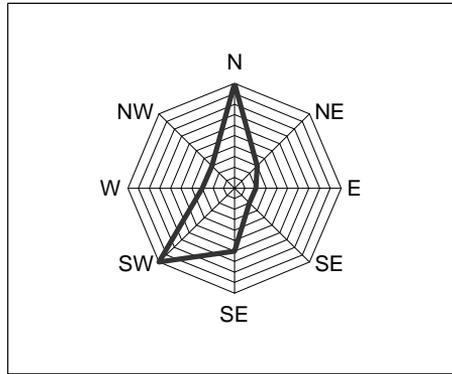


Figura 2.2: Rosa de los vientos para la provincia de Pontevedra (Datos del Instituto Nacional de Meteorología).

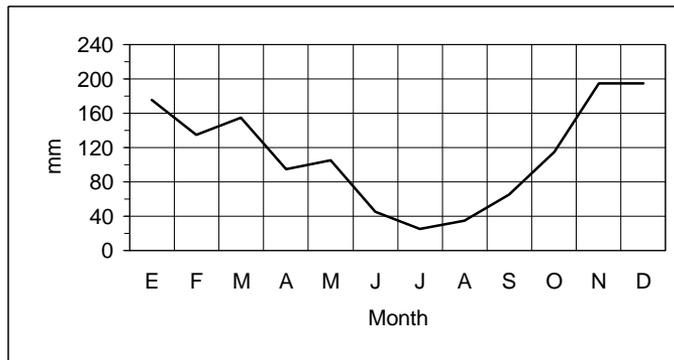


Figura 2.3: Diagrama de lluvia media mensual de 1932 a 1952 recogida en el observatorio municipal de Vigo (Datos del Instituto Nacional de Meteorología).

2.3 Aportes fluviales

Los ríos que desembocan en la Ría de Vigo se indican en la figura 2.4. La cuenca hidrográfica de la Ensenada de San Simón posee una superficie de 435 km² que corresponde al 75.2 % respecto al total de la Ría de Vigo. El río Oitabén-Verdugo aporta el 90% del agua vertida a la Ensenada de San Simón como se muestra en la tabla 2.1. En la actualidad, su caudal se encuentra regulado por el embalse de Eiras.

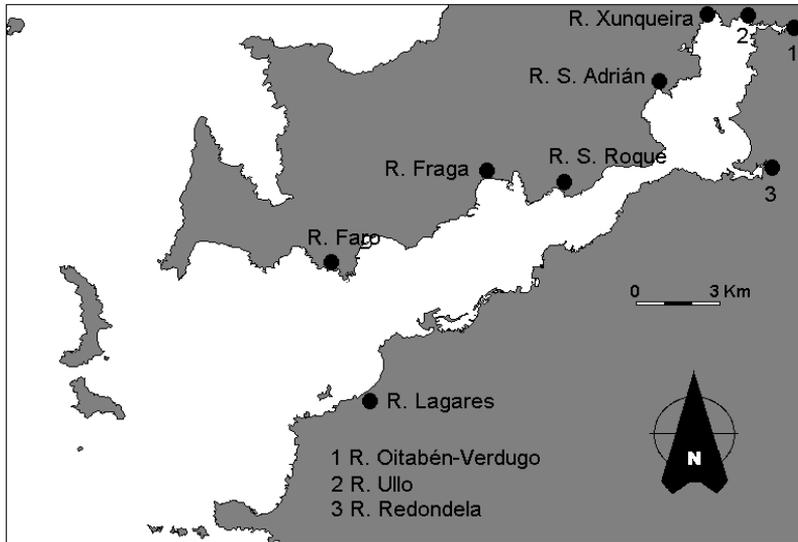


Figura 2.4: Situación de las desembocaduras de los ríos de la Ría de Vigo.

Río	Área de Drenaje (km ²)	Caudal (m ³ s ⁻¹)
San Adrián	14.3	Sin datos
Ullo	15.8	0.91
Xunqueira	18.0	Sin datos
Oitabén	198.7	10.39
Verdugo	132.8	6.92
Redondela	55.2	0.98
TOTAL:	434.8	19.20

Tabla 2.1: Cuenca fluviales y caudales medios anuales para los ríos que desembocan en la Ensenada de San Simón (Nombela *et al.*, 1989).

El río Oitabén-Verdugo es uno de los de menor caudal de las Rías Baixas. Tal y como se presenta en la figura 2.5, el caudal medio máximo y mínimo en la época húmeda es de 55.5 y 14.8 m³s⁻¹ respectivamente y en época seca de 12.5 y 1.8 m³s⁻¹ (Vergara & Prego, 1997).

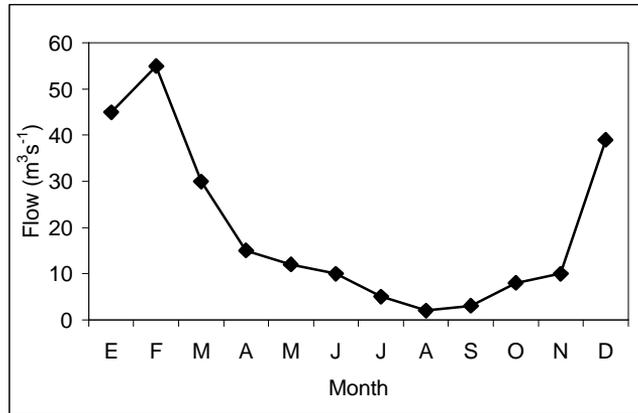


Figura 2.5: Régimen del caudal mensual medio en el período 1980-1992 del río Oitabén-Verdugo (Vergara & Prego, 1997).

2.4 Hidrografía de la Ría de Vigo

El término estuario no posee en la actualidad una definición única. La más común es la adoptada por Cameron y Pritchard (1963), que dice '*An estuary is a semi-enclosed coastal body of water which has free connection to the open sea and within which sea water is measurably diluted with fresh water derived from land drainage*'. Esta definición no tiene en cuenta la influencia de la marea, por lo que se va a considerar la adaptación de ésta propuesta por Dyer (1997): '*An estuary is a semi-enclosed coastal body of water which has a free connection to the open sea, extending into the river as far as the limit of tidal influence, and within which sea water is measurably diluted with fresh water derived from land drainage*'. Según esta definición, la Ría de Vigo será estuario en la medida que exista agua dulce diluida en el agua de mar y esta disolución pueda ser medida. De acuerdo con ello, la Ría de Vigo será un estuario en su totalidad en invierno, cuando el caudal de los ríos que vierten hacia la ría es suficientemente alto. En verano, según el límite estricto impuesto por esta definición, el estuario estaría restringido a la parte más interior de la ría, aunque debido al patrón de circulación que se establece es más sencillo considerar a la ría globalmente como un estuario.

La Ría de Vigo puede ser dividida en tres partes atendiendo a su hidrografía. La parte más cercana al saco de la ría corresponde a la Ensenada de San Simón, que posee procesos estuáricos durante todo el año, debido a la entrada de la marea y al río Oitabén-Verdugo. Como ya se ha dicho, un tercio de esta bahía queda descubierta en marea baja. La parte central se extiende del

Estrecho de Rande a Punta do Muíño y posee una alternancia según la época del año de procesos similares a los de la parte interna y externa. A partir de Cabo de Mar y hasta las Islas Cíes se extiende la tercera parte, bajo influencia oceánica (Prego & Fraga, 1992)

Las causas principales del movimiento de los cuerpos de agua en la Ría de Vigo son: la marea producida por la atracción gravitatoria en el sistema Tierra-Luna-Sol y sus movimientos rotatorios, las diferencias en los campos de densidad del agua tanto dentro de la ría como en las fronteras y el viento reinante en la zona y en el océano próximo. La gran diferencia entre las frecuencias principales de la onda de marea (horas) y las producidas por las otras dos causas (semanales, estacionales) hace que se puedan separar en dos apartados la caracterización hidrográfica de la Ría de Vigo.

2.4.1 Caracterización de la marea en la Ría de Vigo

La elevación de la superficie en la boca de la ría es la que va a inducir el movimiento mareal en ésta. El cambio de nivel del agua es producido por la onda de marea que recorre el Océano Atlántico en el hemisferio Norte y que no es más que una onda de Kelvin de período semidiurno girando en sentido levógiro.

Se presenta a continuación una serie de parámetros generales que caracterizan la naturaleza de la marea y sus distorsiones, así como su aplicación al caso particular de la Ría de Vigo.

Para ello es necesario conocer los armónicos de la marea. Normalmente la onda de marea se descompone en estos armónicos con frecuencias de las fuerzas generadoras del forzamiento total de la marea, las cuales están asociadas al movimiento relativo del sistema Tierra-Luna-Sol (Doodson & Warburg, 1961):

$$\mathbf{h}(t) = \sum_i a_i \cos(\mathbf{w}_i t + \mathbf{f}_i) + R(t) \quad (2.1)$$

donde $R(t)$ se refiere a un pequeño residuo con frecuencia que abarca todo el espectro referido a forzamientos del viento, perturbaciones atmosféricas y efectos no lineales. En la siguiente tabla se presentan los principales armónicos que fueron hallados en el punto 42° 12'N 8°48'W en el año 1997 (Datos I.E.O., 1997):

Nombre del Armónico	Símbolo	Período (horas)	Semi-amplitud (cm)	Fase (Grados)
Semidiurna Lunar Principal	M ₂	12.42	109.830	76.10
Semidiurna Solar Principal	S ₂	12.00	44.901	105.67
Semidiurna Elíptica Lunar	N ₂	12.66	24.219	47.73
Diurna Luni-Solar	K ₁	23.93	5.179	47.19
Diurna Lunar Principal	O ₁	25.82	5.982	314.55
Diurna Elíptica Lunar	Q ₁	26.87	2.692	259.69
Lunar Mensual	M _m	661.3	1.234	194.17

Tabla 2.2: Armónicos principales de la marea en la Ría de Vigo.

A partir de estos armónicos se puede conocer el carácter diurno, semidiurno o mixto de la marea, el cual es definido por el coeficiente de forma F , (Kjerfve & Knoppers, 1991):

$$F = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2} \quad (2.2)$$

donde para valores de $F > 3$ la marea se considera de tipo diurno y para aquellos en que $F < 0.25$, semidiurno. La marea en la Ría de Vigo tiene un pronunciado carácter semidiurno con un coeficiente de forma $F = 0.074$, lo cual es característico de los estuarios atlánticos (Crépon, 1993).

Según la amplitud de onda de marea, los estuarios son clasificados en micromareales si la amplitud media es menor de 2 m, mesomareales si está entre 2 y 4 m, macromareales para una amplitud mayor de 4 m e hipermareales para mayor de 6 m (Davies, 1964). Como la onda de marea tiene una amplitud media de 2.1 m en la Ría de Vigo, ésta pertenece al tipo mesomareal.

En la figura 2.6 se muestra la elevación de marea tomadas en tres puntos de la Ría de Vigo (figura 2.7). Las abscisas están escritas en la hora local, convención que se mantendrá a lo largo del texto. La diferencia tan pequeña entre las amplitudes de los tres puntos (en torno a los 5 cm) hace que la Ría de Vigo tomada hasta el Estrecho de Rande se comporte como un estuario sincrónico (Nichols & Biggs, 1985), a pesar de tener una forma triangular. La explicación de este comportamiento puede ser debida a la existencia de las Islas Cíes que estrechan de sobremanera la boca de la ría. En la pared más interna de la Ensenada de San Simón se ha sugerido la existencia de un *seiche*, es decir, una oscilación periódica dentro de una cuenca semicerrada, y cuyo período estimado es de 52.7 minutos (Nombela & Vilas, 1991).

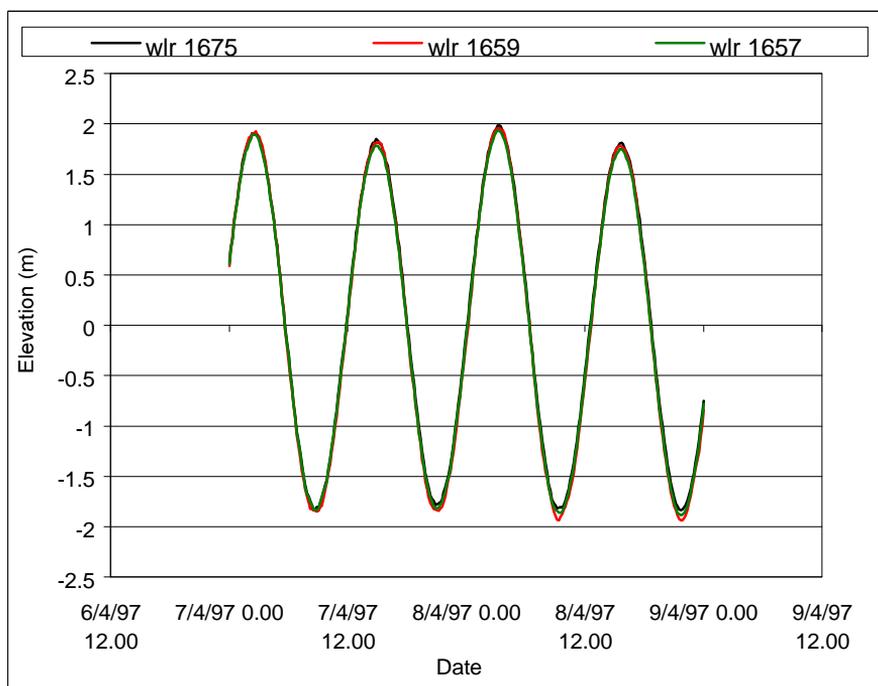


Figura 2.6: Marea medida en 3 puntos de la Ría de Vigo. Posición de los mareógrafos (Datos I.E.O., 1997).

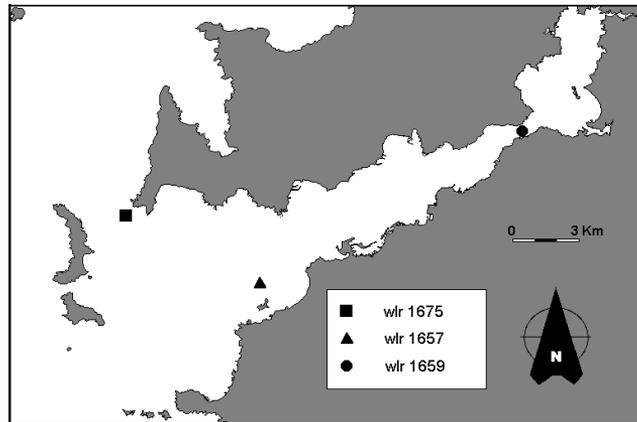


Figura 2.7: Posición de los mareógrafos en la Ría de Vigo.

La distorsión barotrópica de la onda de marea y de su velocidad se definen a través de la razón M_4/M_2 y de la fase relativa $D = f_{M_4} - 2f_{M_2}$ donde f es la fase de las constituyentes correspondientes. El primer parámetro indica la intensidad de la deformación de la onda y el segundo la dirección de esta deformación. Un $D = 0$ indica un flujo rápido y un reflujo lento mientras que la situación contraria se da cuando $D = \pi$. Los flujos y reflujos de la marea son iguales para las situaciones con D de $\pi/2$ y $3\pi/2$, siendo en el primer caso la inversión de la marea más rápida en bajamar y en el segundo en pleamar. Para Vigo, $M_4/M_2 = 0.0064$ y $D = \pi/2$, lo que significa que la deformación de la onda es muy pequeña, siendo muy semejante el flujo y el reflujo con una cierta tardanza en invertir la onda en pleamar.

La razón a/h entre la amplitud de la constituyente M_2 en la frontera abierta del sistema y la profundidad media del dominio caracteriza la capacidad de distorsión del estuario, siendo los mecanismos no lineales importantes a partir de $a/h > 0.1$. En Vigo este parámetro toma el valor 0.05. La capacidad de almacenamiento de agua se calcula dividiendo el prisma de marea por el volumen medio del estuario, siendo este cociente igual a 0.052 en Vigo. Por tanto, aunque la corriente de marea es la corriente de mayor intensidad en una ría, el hecho de que sea periódica y que el acoplamiento no lineal de sus distintas componentes pequeño (Montero *et al.*, 1997) hace que su importancia para el transporte a largo plazo sea también pequeña.

Se muestra a continuación (figura 2.8) una serie temporal de un registro de velocidad de la corriente a diferentes profundidades en el punto situado en la posición $42^\circ 13.479' N$, $8^\circ 49.813' W$. Este punto tiene una profundidad de 26 m. Se puede observar el carácter semidiurno de la marea en las capas internas,

mientras la capa superficial posee velocidades mucho más altas y con una componente diurna acusada, que se asume debida al viento.

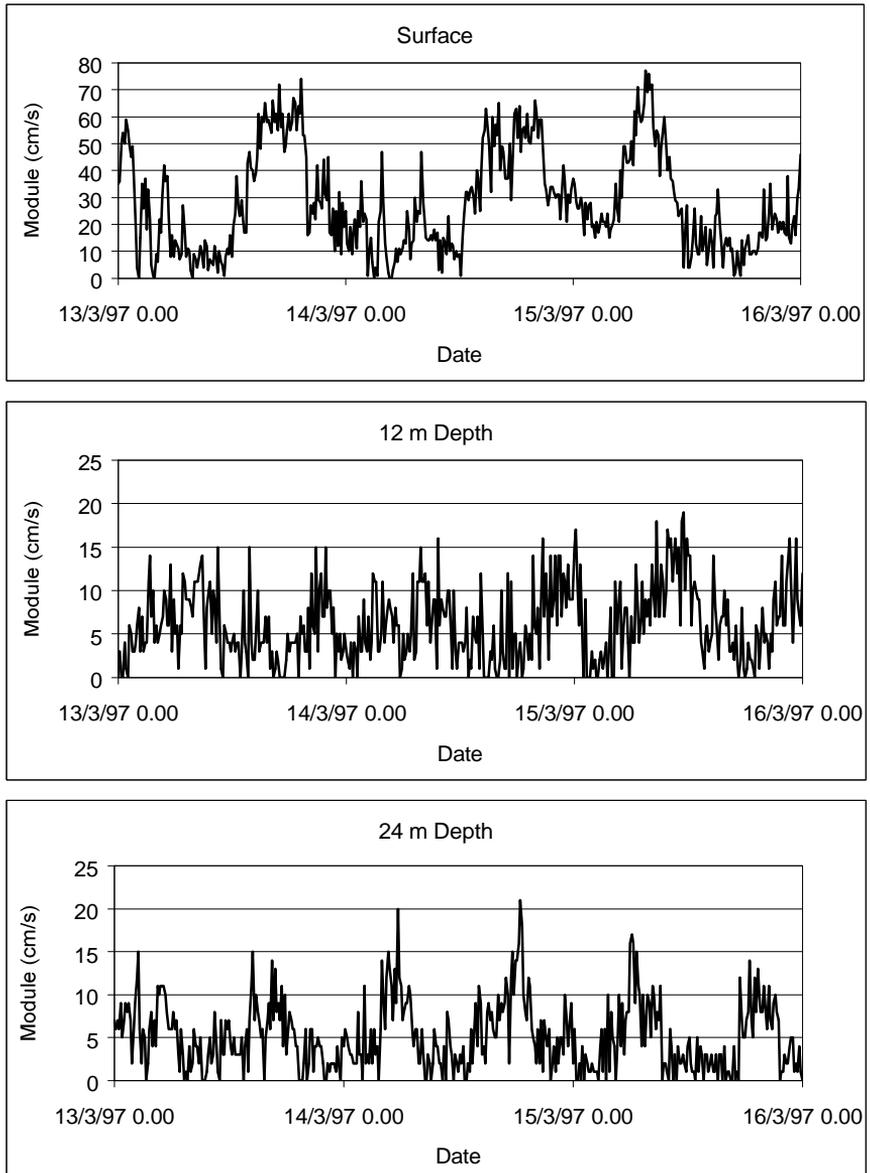


Figura 2.8: Módulo de la velocidad de corriente registrada en el punto $42^{\circ}13.479'N$, $8^{\circ}49.813'W$ a diferentes profundidades. (Datos I.E.O., 1997).

2.4.2 Las masas de agua costera frente a la Ría de Vigo

Un motivo importante de atención hacia las Rías Gallegas se debe al agua oceánica subsuperficial que se encuentra en sus proximidades. Desde principios de siglo se ha detectado la presencia de un agua fría frente a las costas gallegas en los meses de verano, pero hasta comienzos de los años setenta (Molina, 1972) no se había clasificado este fenómeno como afloramiento o *upwelling*. Este es producido por la acción del viento y la rotación de la Tierra que en el hemisferio Norte (Sur) hace desplazar las masas de agua a la derecha (izquierda) en dirección perpendicular a la de este viento. Este desplazamiento del agua es conocido como transporte de Ekman. Así, en las costas de Galicia, entre los meses de abril hasta octubre, el viento predominante de componente Norte (Wooster *et al.*, 1976, Mc.Clain *et al.*, 1986) produce un transporte de Ekman hacia el Oeste, esto es, hacia el océano (figura 2.9). Por continuidad, aflora un agua procedente del borde de la plataforma continental, identificado como North Atlantic Central Water (NACW) (Fraga, 1981) y ya actualmente y para la costa frente a la Ría de Vigo como Eastern North Atlantic Water de origen subtropical (ENAWt) (Ríos *et al.*, 1992; Castro *et al.*, 1994). Esta masa de agua se caracteriza por ser fría y rica en nutrientes. El fenómeno, que tiene su máximo en la proximidad del Cabo Finisterre, es de particular importancia pues conlleva la introducción de estos nutrientes en las rías (Tenore *et al.*, 1984), con el correspondiente aumento de producción primaria (Blanton *et al.*, 1987). Además, en el caso de la Ría de Vigo refuerza la circulación estuárica positiva en doble capa durante los meses de verano. (Prego & Fraga, 1992; Taboada *et al.*, 1998).

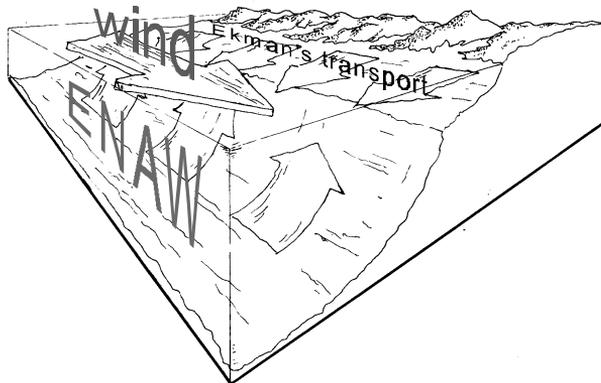


Figura 2.9: Esquema del afloramiento.

Durante los otros meses del año, la presencia de viento de componente Sur da lugar a episodios de hundimiento del agua o *downwelling* (Blanton *et al.*, 1984), fenómeno contrario al afloramiento o *upwelling*. La transición entre estos dos regímenes ha sido asociada con la presencia de mareas rojas en las Rías Baixas (Fraga & Prego, 1989).

2.4.3 Circulación estuárica. Distribución de salinidad y temperatura

En general, cuando se habla de circulación estuárica en las Rías Baixas se refiere a aquella producida por la denominada corriente residual. Con este término se recoge aquella dinámica de tipo semanal o estacional que resulta de filtrar movimientos de las masas de agua de frecuencias muy altas, como por ejemplo los armónicos principales de la onda de marea. Por tanto, la circulación estuárica mostrará un esquema del transporte neto de los cuerpos de agua que subyace por debajo de los movimientos periódicos producidos por la marea. Las causas generadoras de esta circulación son principalmente las distribuciones del campo de densidad que se producen en la ría y en sus fronteras (Fraga & Margalef, 1979), y el viento. La densidad está determinada a su vez por los campos de salinidad y temperatura. A la corriente producida por la distribución de la densidad se conoce con el nombre de baroclínica. Se muestran a continuación perfiles típicos de salinidad y temperatura para los meses de febrero y agosto para el año 1986 (Prego *et al.*, 1988) en las estaciones de la figura 2.10.

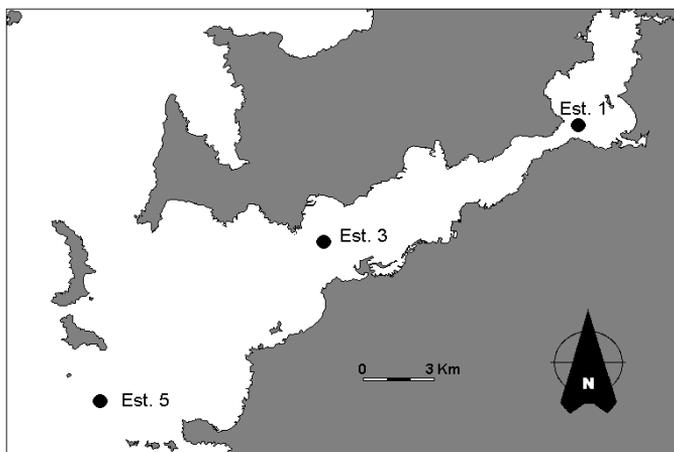


Figura 2.10: Situación de las estaciones en donde se muestran los perfiles de salinidad y temperatura.

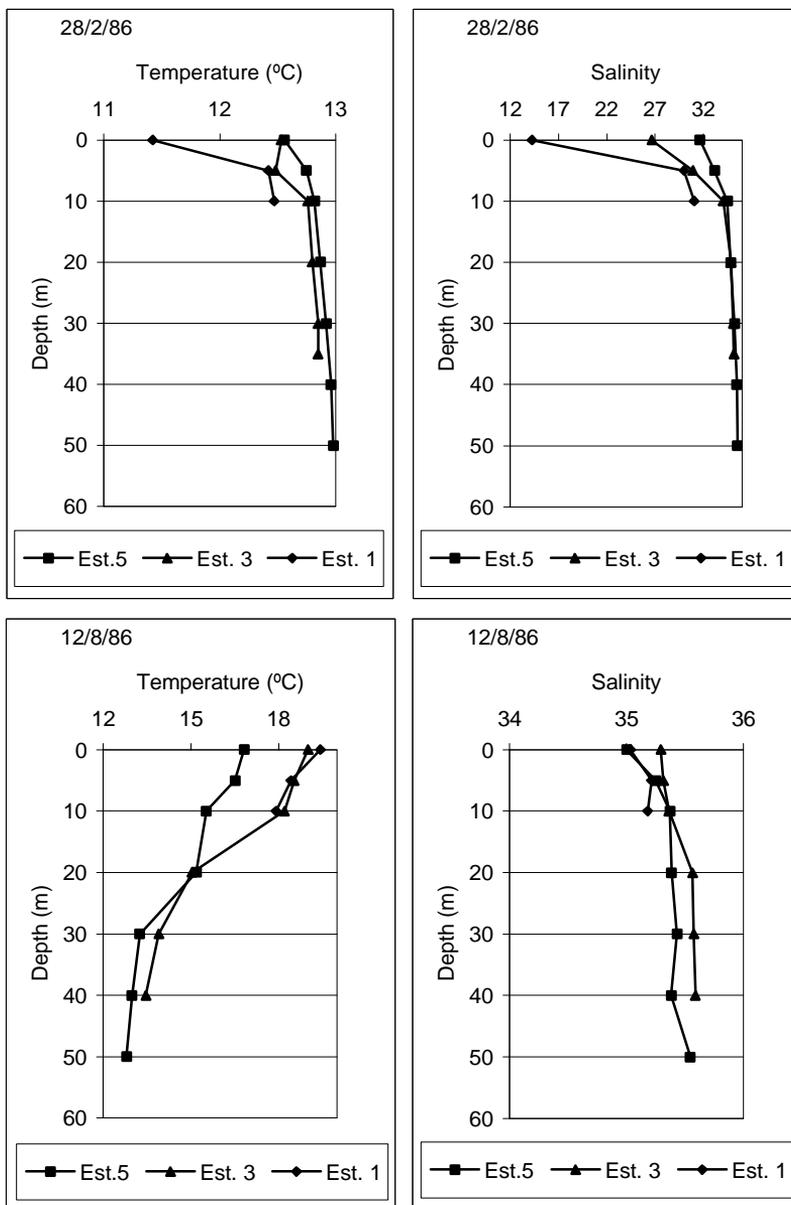


Figura 2.11: Perfiles de temperatura y salinidad para febrero y agosto de 1986 en las estaciones indicadas en la figura 2.10.

De noviembre a marzo, se suele constatar una inversión térmica de la temperatura (Fraga, 1967), al producirse un enfriamiento de las capas superficiales, fenómeno que alcanza su máximo en enero. Sin embargo, la estabilidad de la columna es mantenida por la salinidad. Ésta va a tener una fuerte haloclina a causa de los aportes continentales por la lluvia caída en esos meses. El vertido de agua dulce, además de disminuir la densidad en la superficie, promociona la entrada de agua costera cerca del fondo de la ría, la cual hace aumentar la salinidad de las capas inferiores. La columna de agua permanece estratificada con circulación en doble capa (Prego & Fraga, 1992). El tiempo de residencia del agua se sitúa entorno a una semana y una velocidad residual media de 5.5 cm s^{-1} . A pesar de esto, la presencia de vientos predominantes del SW por estas fechas, provoca interrupciones de la circulación y bloqueos de la salida del agua en las bocas de la ría. En algunos momentos también se ha observado una columna prácticamente homogénea, sin mostrar circulación estuárica (Mouriño *et al.*, 1984).

A partir de marzo y durante toda la primavera, comienza un aumento de la temperatura del agua superficial. Aunque existe un descenso de las lluvias, el hecho de estar el río Oitabén regulado por el embalse de Eiras provoca que aún haya episodios de baja salinidad superficial, aunque cada vez menores. Empieza a presenciarse esporádicamente agua aflorada de tipo ENAWt en la boca de la ría (Prego *et al.*, 1990). La circulación desciende hasta un cuarto de la existente en invierno.

En verano, la temperatura es la que determina la estratificación de la columna. Existe un aumento de la temperatura en las capas superficiales debido a la radiación solar que va a contrastar con un enfriamiento del fondo, el cual es provocado por el intenso afloramiento de ENAWt en esta época con un 45% de agua oceánica en la Ensenada de San Simón. Si el afloramiento se intensifica puede llegar a enfriar incluso las capas superficiales. La haloclina es más difusa debido a un aporte menor de los ríos (figura 2.5). La circulación es menor que en invierno y primavera, excepto durante períodos de afloramiento, que llega incluso a superar la velocidad que se da en invierno con $7-8 \text{ cm s}^{-1}$ en algunas zonas. Los vientos predominantes del NE dentro de la ría favorecen aún más la circulación estuárica.

Se ha comprobado que algunas veces a finales de septiembre y después de un intenso afloramiento, el cambio en la dirección del viento de NE a SW provoca un bloqueo temporal de la circulación en la boca, con episodios de *downwelling*. La importancia de este proceso viene dada por su relación con la aparición de mareas rojas en las rías (Fraga & Prego, 1989). Se ha propuesto un esquema de circulación en el que existe *downwelling* en la boca de la ría con una

masa contigua girando ciclónicamente de forma inestable que sería la que separaría a la masa oceánica del interior de la ría. Parece ser que este proceso puede darse en todas las Rías Baixas (Tilstone *et al.*, 1994).

2.4.4 Clasificación estuárica de la Ría de Vigo

Muchas han sido las clasificaciones cualitativas que se han hecho de la hidrodinámica de un estuario, no habiendo en la actualidad una clasificación definitiva (Pritchard, 1989). Una primera ordenación se debe a Pritchard (1952) que llama estuarios positivos a aquellos en los que el aporte de agua dulce al estuario excede a la evaporación, siendo negativo si se diese el caso contrario. Cameron y Pritchard (1963) clasifican los estuarios en cuatro tipos:

Cuña salina: Donde el efecto de la marea es pequeño. El agua dulce fluye por la superficie y el agua del mar penetra por el fondo, con una interfase bien diferenciada. Domina el flujo del río que, debido a la fuerza de Coriolis, tiende a salir por la derecha en el hemisferio Norte. Se caracteriza por la alta estratificación.

Fiordo: Similares a los de cuña salina, pero donde la haloclina está situada a gran profundidad. Por encima de la capa isohalina del fondo el estuario puede ser homogéneo o parcialmente mezclado, saliendo el agua dulce en una capa muy pequeña por la superficie. Debido a la poca profundidad existente en la boca de los fiordos, las capas más profundas poseen un tiempo de residencia muy grande.

Parcialmente mezclado: Donde la marea es apreciable, por lo que se produce un intenso intercambio salino en la columna de agua. La haloclina va a ser más difusa, aumentando la influencia de agua dulce hacia el fondo del estuario.

Homogéneos o bien mezclados: La marea mezcla totalmente la columna de agua. No existe haloclina, por lo que el estuario va aumentando su salinidad de forma progresiva hacia su boca, siendo el perfil vertical de densidad constante para cada punto. Se pueden dividir en lateralmente homogéneos y lateralmente inhomogéneos dependiendo si existen diferencias en la distribución de la densidad a lo ancho del estuario.

La Ría de Vigo se clasifica normalmente como un estuario positivo parcialmente mezclado con una circulación residual en doble capa, la más profunda más densa con agua entrante, y la superior con agua saliente y densidad menor (Prego *et al.*, 1990).

Se han propuesto también varios índices cuantitativos para la clasificación de un estuario, aunque muchos con una aplicación muy restringida. Simmons (1955) encuentra que cuando el *flow ratio* (la razón entre el aporte fluvial en un ciclo de marea y el prisma de marea) es igual o mayor que 1, el estuario es altamente estratificado y cuando es menor que 0.1 es bien mezclado. Para el caso de Vigo con el caudal máximo de la época húmeda estimado para todos los aportes este número es 0.03. Nombela (1989) clasifica la Ría de Vigo según el diagrama de Hassen y Rattray (1966) obteniendo un estuario de tipo 1 en el Estrecho de Rande, como se puede ver en la figura 2.12. En este diagrama se representa el parámetro de estratificación $\delta S / \langle S \rangle$, definido la diferencia de salinidad entre el fondo y la superficie δS dividido por la salinidad media en profundidad $\langle S \rangle$, frente al parámetro de circulación u_s / u_f , definido como la razón entre la velocidad en la superficie u_s y la velocidad media en la sección u_f . En el tipo 1 el flujo neto es hacia el mar coincidiendo, por tanto, con el caso de estuarios bien mezclados. En el tipo 1b existe una cierta estratificación, pero la circulación carece de flujo hacia dentro del estuario por el fondo. En el tipo 2, los estuarios son parcialmente mezclados. Los estuarios de tipo 3 se corresponden a los fiordos, siendo tan profundos en el 3b que la capa del fondo permanece quieta. El tipo 4 es para estuarios con cuña salina y en el 5 no se produce mezcla.

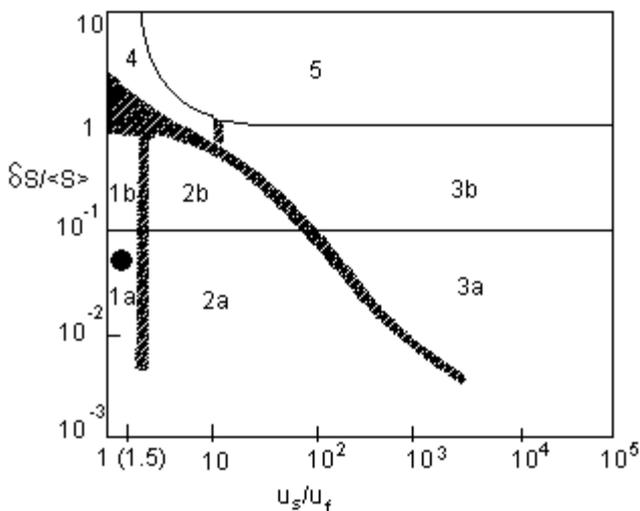


Figura 2.12: Esquema de Hansen y Rattray. El punto indica la posición de la Ría de Vigo según Nombela (1989).

Nombela (1989) apunta que estos sistemas de clasificación son cuestionables pues se basan en gran medida en la salinidad para determinar la estratificación y porque no tienen en cuenta el efecto del viento ni del afloramiento, que se comprueba que tiene un papel importante tanto en la circulación como en los procesos de mezcla que tiene lugar en la Ría de Vigo. Fischer (1972) introduce el número estuárico de Richardson que representa la razón entre la ganancia de energía potencial debida a las descargas fluviales y el poder de mezcla de las corrientes mareales. Se define como

$$Ri_e = \frac{D\mathbf{r}}{\mathbf{r}} \cdot \frac{gu_f}{bu_t^3} \quad (2.3)$$

siendo u_t la velocidad media de la corriente de marea y b el ancho del estuario, \mathbf{r} la densidad media en la sección y $D\mathbf{r}$ la diferencia de densidad entre el fondo y la superficie en esa sección. Para un $Ri_e > 0.8$ el estuario es altamente estratificado, para $0.8 > Ri_e > 0.08$ es parcialmente estratificado y para $Ri_e < 0.08$ es bien mezclado. Con valores típicos favorables a la estratificación, el número estuárico de Richardson que se obtiene para la Ría de Vigo es 0.08 (Taboada *et al.*, 1998), estando en el límite entre parcialmente mezclado y bien mezclado.

Por tanto, se comprueba que la circulación de la Ría de Vigo es compleja. Existe una estratificación mantenida por la diferencia de salinidad en la época húmeda, debido a los aportes fluviales. En la época seca, la estratificación es mantenida por diferencias de temperaturas causadas por la radiación solar y el fenómeno de afloramiento. Se comprueba que existe una circulación de corriente residual en doble capa propia de un estuario parcialmente mezclado, la cual se extenderá a lo largo de toda la ría en épocas húmedas y se retraerá a las partes más interiores de la ría en época seca, con la penetración de agua oceánica. La circulación en doble capa es también favorecida por el afloramiento.

Capítulo 3

3 Descripción Física del Sistema

3.1 Introducción

En este capítulo se desarrolla el sistema de ecuaciones que describen el fenómeno físico que se quiere estudiar. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de aguas poco profundas, pues la relación entre la profundidad del sistema y la longitud de las ondas a estudiar es muy pequeña. Ello permite considerar las aceleraciones verticales despreciables por lo que se puede suponer la aproximación hidrostática. En el siguiente apartado, se describen este tipo de aproximaciones así como los sistemas de coordenadas que se suelen utilizar para fluidos geofísicos. También se realizan las transformaciones de las ecuaciones necesarias hasta llegar al sistema utilizado. Los apartados tres y cuatro de este

capítulo se dedicarán al problema del cierre de la turbulencia y a los sistemas de coordenadas verticales usados, debido a la importancia que tienen en una posterior resolución numérica de las ecuaciones.

3.2 Ecuaciones del sistema: Ecuaciones de aguas poco profundas.

3.2.1 Ecuaciones de conservación

Un fluido considerado como medio continuo puede ser descrito a través de las ecuaciones de conservación de la masa, del momento y de la energía. La conservación de la masa se expresa mediante la ecuación de continuidad que, considerando la convención de Einstein, se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{r}u_i)}{\partial x_i^0} = 0 \quad (3.1)$$

donde \mathbf{r} es la densidad y u_i es la velocidad en la dirección i , en un sistema referencial cartesiano x_i^0 , con $i = 1, 2, 3$, tal y como muestra la figura 3.1 en la página siguiente. La conservación del momento viene dada por la siguiente ecuación

$$\frac{\partial(\mathbf{r}u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{r}u_i u_j)}{\partial x_j^0} = \mathbf{r}k_i + \frac{\partial \mathbf{s}_{ji}}{\partial x_j^0} \quad (3.2)$$

con k_i , la fuerza másica en la dirección i , y \mathbf{s}_{ji} las fuerzas superficiales de presión y viscosas actuando en la dirección i sobre una superficie elemental perpendicular a j . Por último, la conservación de la energía se escribe como

$$\mathbf{r} \frac{D}{Dt} \left(\frac{u_i u_i}{2} + e \right) = \mathbf{r}k_i u_i + \frac{\partial(\mathbf{s}_{ji} u_i)}{\partial x_j^0} - \frac{\partial q_i}{\partial x_j^0} \quad (3.3)$$

considerando $D/Dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ la derivada total, e la energía interna y q_i la componente del flujo de calor en la dirección i . Se trata, por tanto, de un sistema de 7 ecuaciones y 17 incógnitas (\mathbf{r} , u_i , \mathbf{s}_{ij} , q_i , e).

3.2.2 Transformaciones y aproximaciones

A continuación se recogen de forma sintética una serie de aproximaciones y transformaciones de las ecuaciones anteriores hasta llegar a las ecuaciones finales que van a ser utilizadas.

Transformación del sistema de coordenadas genérico en un sistema solidario con la Tierra.

Al estudiar problemas relacionados con fluidos geofísicos (océano y atmósfera) se suele utilizar un sistema de referencia solidario a la Tierra, como el que muestra la figura 3.1, donde $\vec{\Omega}$ es la velocidad de rotación de la Tierra. Se considera x_1 en la dirección Oeste-Este, x_2 en la dirección Sur-Norte, y x_3 la de la dirección radial partiendo del centro de la Tierra. Al cambiar la ecuación (3.2) a este sistema de coordenadas aparece un término de aceleración centrípeta y otro correspondiente a la aceleración de Coriolis.

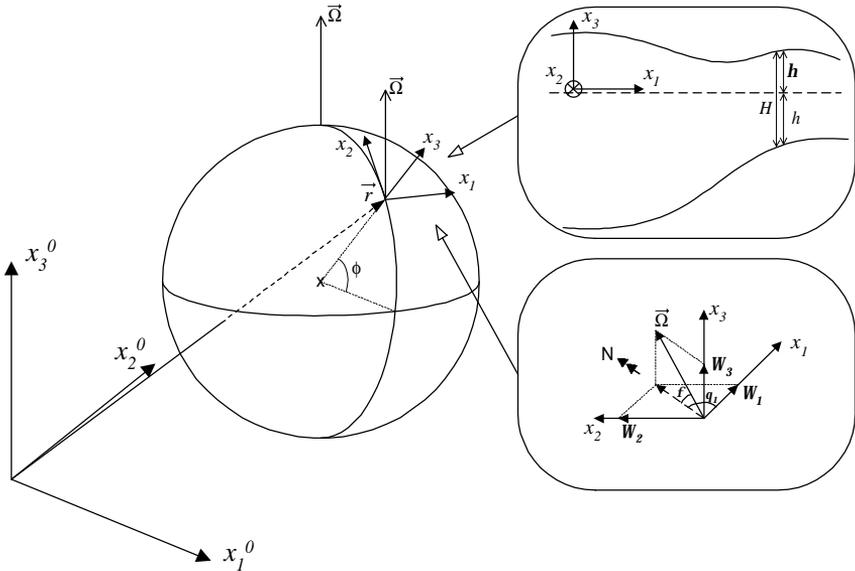


Figura 3.1: Sistemas de coordenadas utilizados (Martins, 1999). Símbolos explicados en el texto.

Se supone la velocidad lineal de la translación de la Tierra constante y también la corrección de Eötvös, que consiste en despreciar las componentes verticales y las que están multiplicadas por la velocidad vertical en el término de Coriolis (Apel, 1987). Así, el término de Coriolis puede ser escrito como

$$-fu_2\bar{e}_1 + fu_1\bar{e}_2 \quad (3.4)$$

donde $f = 2W\sin f$ es el parámetro de Coriolis con f igual a la latitud. Si el área de aplicación del sistema no varía mucho de latitud se puede suponer f constante. Se considera además que la fuerza centrípeta resultante de esta transformación se engloba dentro de la fuerza gravitatoria $k_i = -g\bar{d}_{i3}$ (Pedlosky,

1987), la cual en términos prácticos se considera constante. La otra fuerza másica existente es el gradiente del potencial de marea, que no es más que la fuerza gravitatoria ejercida por el sistema Tierra-Luna-Sol. Ésta es sólo importante para simulaciones de marea a escala global, por lo que será omitida en las ecuaciones que se utilizarán.

Incompresibilidad: Esta aproximación es aceptable si se tiene en cuenta que el fluido a tratar es un líquido. Consiste en considerar que $D\mathbf{r}/Dt \ll 1$, lo cual se da para números de Mach menores que 0.3. Esta hipótesis permite desacoplar las ecuaciones de continuidad (3.1) y de conservación del momento (3.2) de la de la conservación de la energía (3.3), lo que significa además que es posible obtener de la ecuación de la energía la ecuación de transporte de calor.

Fluido Newtoniano: Es decir, se considera que el tensor de esfuerzos es linealmente proporcional al tensor de deformaciones. Se suele utilizar una ley constitutiva de Cauchy-Poisson que para fluidos incompresibles es de la forma

$$\mathbf{s}_{ij} = -p\mathbf{d}_{ij} + \mathbf{m} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.5)$$

donde \mathbf{m} es la viscosidad molecular que se considera constante.

Aproximación hidrostática: Puesto que las escalas horizontales en el océano son mucho mayores que las verticales, es factible pensar que las aceleraciones verticales son pequeñas respecto a los otros términos que intervienen en la ecuación de momento en la dirección vertical. En realidad, y haciendo un análisis de los ordenes de magnitud, los dos únicos términos que contribuyen son el de la presión y el de la gravedad. Esta ecuación queda reducida al balance hidrostático de las fuerzas

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\mathbf{r}g \quad (3.6)$$

Aproximación de Boussinesq: Juntamente con la aproximación hidrostática es posible hacer la aproximación de Boussinesq. Consiste en considerar que las aceleraciones del flujo son menores que las de la gravedad y por tanto las variaciones de la densidad sólo son importantes cuando afectan a los términos gravitatorios y no a los términos de inercia.

El término de presión en las ecuaciones de momento queda

$$\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial p}{\partial x_i} \approx \frac{1}{\mathbf{r}_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0} g_i \quad (3.7)$$

habiéndose descompuesto la densidad en una densidad de referencia dependiente sólo de la profundidad y un desvío relativamente pequeño de la densidad de referencia

$$\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{r}_0(x_3) + \mathbf{r}'(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.8)$$

Si además sustituimos la ecuación (3.8) en (3.6) e integramos desde el fondo a la superficie, obtenemos una expresión para la presión hidrostática de la forma

$$p(x_3) = p_{atm} + \mathbf{r}_0 g(\mathbf{h} - x_3) + g \int_{x_3}^{\mathbf{h}} \mathbf{r}' dx_3 \quad (3.9)$$

siendo p_{atm} la presión atmosférica y \mathbf{h} la elevación de la superficie libre respecto a un nivel de referencia, como muestra el tercer sistema referencial de la figura 3.1. Utilizando la regla de Leibnitz se obtiene su gradiente horizontal,

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{atm}}{\partial x_i} + g[\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'(\mathbf{h})] \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} + g \int_{x_3}^{\mathbf{h}} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial x_i} dx_3 \quad i = 1, 2 \quad (3.10)$$

Aproximación de Reynolds: El carácter turbulento del flujo a tratar hace que las ecuaciones de la dinámica no puedan ser resueltas ni analítica ni numéricamente, puesto que las incógnitas son magnitudes instantáneas. La descomposición de Reynolds consiste en considerar las magnitudes como compuestas de una parte relativamente lenta y otra que recoge las perturbaciones rápidas de la primera, llamada parte turbulenta. Así, por ejemplo, para la velocidad se tendría

$$u_i(x_i, t) = U_i(x_i, t) + u'_i(x_i, t) \quad (3.11)$$

De estos dos conjuntos de variables, el interés se centra en el que posee las variables promediadas. Tras hacer la descomposición y promediar las ecuaciones, la ecuación de continuidad es la misma para las variables promediadas mientras que a la de momento se le añade un nuevo término que regula las variaciones del campo de fluctuaciones y que tiene la forma

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(-\overline{\mathbf{r}u'_i u'_j})}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

siendo R_{ij} el tensor de esfuerzos de Reynolds. Al ser este tensor simétrico aparecen seis nuevas variables independientes que deben ser halladas a partir de nuevas ecuaciones. A este problema se le denomina cierre de la turbulencia, el cual se suele resolver a través de la analogía de los flujos turbulentos con el término de viscosidad (Pond & Pickard, 1983). Estos flujos se suponen

proporcionales al gradiente de la magnitud transportada, en este caso la velocidad, a través de un factor de proporcionalidad llamado viscosidad turbulenta, del que se hablará más adelante. Baste ahora saber que, a diferencia de la viscosidad molecular que se suele considerar isotrópica, en este caso se hace distinción entre la viscosidad turbulenta vertical y horizontal debido a las diferentes escalas de estas dos direcciones en el océano. Por tanto, el último término queda

$$-\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_H \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) (1 - \mathbf{d}_{j3}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_V \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \mathbf{d}_{j3} \quad (3.13)$$

donde A_H y A_V son las viscosidades turbulentas horizontal y vertical, que se resuelven a través de un modelo de turbulencia. A partir de ahora, se volverá a utilizar las letras minúsculas para las velocidades referidas ya a las variables promediadas.

Elevación de la superficie libre: Para el cálculo de la superficie libre \mathbf{h} se usará el referencial de la figura 3.1 donde H es la profundidad total desde el fondo a la superficie, h es la profundidad del fondo respecto a un nivel fijo de referencia (suele ser el cero hidrográfico) y \mathbf{h} es la altura de la superficie libre sobre este nivel. Teniendo en cuenta las condiciones de contorno para la velocidad vertical en la superficie (denominada condición cinemática) y el fondo

$$\text{Superficie} \quad u_3 = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

$$\text{Fondo} \quad u_3 = 0 \quad (3.15)$$

y aplicándolas a la ecuación de la continuidad una vez integrada en toda la columna de agua, se llega a la ecuación de la superficie libre

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\mathbf{h}} u_i dx_3 \quad i = 1, 2 \quad (3.16)$$

Velocidad vertical: Se calcula integrando la ecuación de continuidad entre el fondo y la altura donde se desee conocer el valor de la velocidad vertical

$$u_3(x_3) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{x_3} u_i dx_3 \quad i = 1, 2 \quad (3.17)$$

Ecuación de estado y transporte de salinidad y temperatura: La ecuación internacional de estado para el agua del mar IES80 (UNESCO, 1981) tiene la forma

$$\mathbf{r}(S, T, p) = \mathbf{r}(S, T, p = 0) \frac{1}{(1 - p/K(S, T, p))} \quad (3.18)$$

donde p es la presión relativa, S la salinidad y K el inverso del coeficiente de expansión volumétrica relativa que se calcula a partir de:

$$K = \frac{v_0}{v_0 - v_p} p = K_0(S, T) + A(S, T) \cdot p + B(S, T) \cdot p^2 \quad (3.19)$$

donde v es el volumen específico y K_0 , A y B son funciones polinomiales de S y T .

Por haber considerado aguas poco profundas e incompresibilidad se supone que la ecuación de estado del agua de mar depende sólo de la salinidad y la temperatura. La ecuación utilizada va a ser (Leendertsee & Liu, 1978)

$$\mathbf{r} = (5890 + 38T - 0.375T^2 + 3S) / ((1779.5 + 11.25T - 0.0745T^2) - (3.8 + 0.01T)S + 0.698(5890 + 38T - 0.375T^2 + 3S)) \quad (3.20)$$

en la que se desprecia el efecto de la presión, consideración válida sobre todo para profundidades inferiores a 1000 m.

En las ecuaciones de transporte de salinidad y temperatura también se usarán variables promediadas tras la descomposición de Reynolds. Poseerán también un término de difusión turbulenta y aparece entonces como nuevas incógnitas la difusividad turbulenta vertical y horizontal K_H y K_V que se suponen normalmente iguales para las ecuaciones de la temperatura y la salinidad. Suelen ser halladas a través de relaciones directas con las viscosidades turbulentas.

3.2.3 Sistema de ecuaciones para aguas poco profundas

Se utilizará a partir de ahora la nomenclatura para el sistema de coordenadas de $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ y para la velocidad $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$, por ser éstas las que se usan generalmente en problemas geofísicos. Se muestra a continuación el sistema definitivo de ecuaciones utilizadas, tras todas las aproximaciones y transformaciones anteriores. Este sistema de ecuaciones se completa con las ecuaciones de transporte de la temperatura y la salinidad.

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\mathbf{h}} u \, dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\mathbf{h}} v \, dz \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} - fv = & -\frac{1}{\mathbf{r}_0} \frac{\partial p_{atm}}{\partial x} - g \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{\mathbf{r}_0} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} - \\ & \frac{g}{\mathbf{r}_0} \int_z^{\mathbf{h}} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial x} \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} + fu = & -\frac{1}{\mathbf{r}_0} \frac{\partial p_{atm}}{\partial y} - g \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{\mathbf{r}_0} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial y} - \\ & \frac{g}{\mathbf{r}_0} \int_z^{\mathbf{h}} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial y} \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \, dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \, dz \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(uS)}{\partial x} + \frac{\partial(vS)}{\partial y} + \frac{\partial(wS)}{\partial z} = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial S}{\partial z} \right) + F_S \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F_T \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = (5890 + 38T - 0.375T^2 + 3S) / ((1779.5 + 11.25T - 0.0745T^2) - \\ (3.8 + 0.01T)S + 0.698(5890 + 38T - 0.375T^2 + 3S)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde F_T y F_S representan las fuentes y sumideros de la temperatura y de la salinidad respectivamente.

Con este sistema de ecuaciones queda descrita la dinámica del problema siempre y cuando las viscosidades y difusividades turbulentas sean resueltas.

3.3 Modelización de la turbulencia

El problema de caracterizar la turbulencia tiene que ver en gran medida con las escalas a las que se está trabajando tanto en el aspecto físico como computacional. En el océano existen tres ventanas espectrales particularmente importantes, las cuales se designan microescala, mesoescala y macroescala. En la tabla 3.1 se presenta un esquema de estas escalas.

FRECUENCIAS (s^{-1})	VENTANA ESPECTRAL	PROCESOS FILTRADOS
1 a 10^{-2} (1 segundo a 1 minuto) Frecuencia de Brunt-Väisälä	MICROESCALA <ul style="list-style-type: none"> • Turbulencia 3D • Onda corta en superficie • Turbulencia <i>bliny</i> 	Difusión molecular
10^{-4} a 10^{-5} (1 hora a 1 día) Frecuencia de Coriolis	MESOESCALA <ul style="list-style-type: none"> • Oscilaciones inerciales • Marea • Ondas internas • <i>Storm surges</i> 	Turbulencia <i>bliny</i>
10^{-4} a 10^{-8} (1 semana a 1 año) Frecuencia de Kibel	MACROESCALA <ul style="list-style-type: none"> • Corrientes frontales • Ondas de Rossby • Procesos estacionales • Procesos climáticos 	Procesos de mesoescala

Tabla 3.1: Representación esquemática de la variabilidad del océano (Santos, 1995).

En el problema que se va a tratar los fenómenos que se estudian pertenecen a la mesoescala, por lo que la microescala es filtrada e incluida en la parametrización de la turbulencia.

En un flujo turbulento, la energía cinética turbulenta cae en cascada de los grandes remolinos a los pequeños, hasta llegar a escalas donde la viscosidad es importante y la energía es disipada en forma de calor. Esta cascada se conoce como cascada de Richardson (Frisch, 1995).

La hipótesis de Kolmogorov se usa para parametrizar el transporte turbulento en las escalas oceánicas de microescala tridimensional a través de la ecuación de los 4/3, la cual dice que la difusión turbulenta A viene dada por

$$A(L) = CL^{4/3} \epsilon^{1/3} \quad (3.28)$$

donde L es la escala característica del proceso de difusión turbulenta en cuestión, ϵ la tasa de disipación de energía turbulenta y C una constante.

La turbulencia de macroescala y mesoescala presenta una estructura más compleja, la cual está asociada con las escalas en las que el océano recibe inyecciones de energía. En estos puntos la aplicación de la ley de los 4/3 es inadmisibles pues no se conserva la energía del sistema ni existe isotropía. Según Ozmidov (1990) el océano recibe energía sobre todo en tres escalas (millares de km, asociada con la circulación global; 10 km, escalas de la marea y de las ondas internas; y 10 m donde se encuentran las ondas de superficie). Entre estas escalas existen tres bandas donde es posible aplicar la ley de los 4/3, como se muestra en la figura 3.2. Los valores de ϵ propuestos para cada una de estas bandas son respectivamente $10^{-10} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $10^{-8} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ y $10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Como se ha visto ya, la turbulencia está asociada directamente con la escala del fenómeno, por lo que se va a distinguir a la hora de calcular la difusión turbulenta si ésta es en horizontal o en vertical.

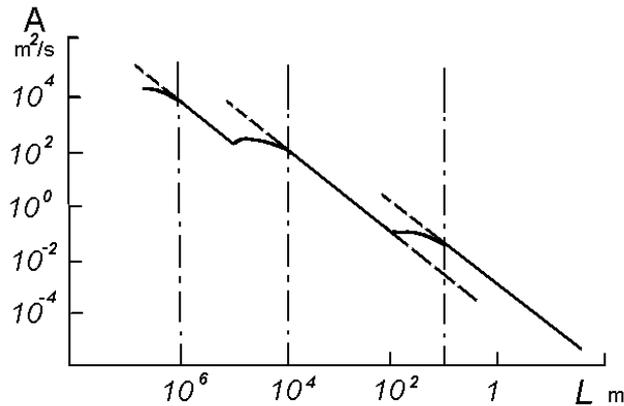


Figura 3.2: Patrón de la dependencia del coeficiente del transporte turbulento horizontal A de la escala del fenómeno L . (Ozmidov, 1990)

3.3.1 Modelización de la turbulencia horizontal

Para la modelización de la turbulencia horizontal hay que tener en cuenta que, debido a que la escala de los fenómenos estudiados suele ser mayor en horizontal que vertical, la discretización espacial que se utiliza para la resolución numérica es más grosera en horizontal que en vertical. Aquellos fenómenos de tamaño inferior al paso espacial horizontal serán filtrados, por lo que deberán ser incluidos en el coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal como fenómenos *subgrid*. La difusión turbulenta horizontal queda así íntimamente ligada a la dimensión de la malla utilizada y puede ser parametrizada a través de la extensión de la ley de los 4/3, utilizando como escala el paso espacial. Debido también al hecho de que los gradientes en la dirección horizontal son más pequeños que en la vertical, al término de difusión turbulenta horizontal se le va a conceder mucha menos importancia, tomándose normalmente como constante. Se propone, siguiendo lo anterior (Okubo, 1974) y siempre que la escala no coincida con una zona de inyección de energía, una parametrización de la viscosidad turbulenta horizontal de la siguiente forma

$$A_H = \alpha L^{\frac{4}{3}} \quad (3.29)$$

La constante de proporcionalidad se corresponde a $Ce^{1/3}$ con C normalmente igual a 1. La constante α varía entre $0.002 \text{ cm}^{2/3} \text{ s}^{-1}$ y $0.01 \text{ cm}^{2/3} \text{ s}^{-1}$. Para un paso espacial de 300 m, la viscosidad turbulenta horizontal variará entre 0.2 y $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Sin embargo, este valor se suele escoger como parámetro de

calibrado del modelo numérico, pues en la difusión turbulenta horizontal, no sólo debe ir incluida la difusión física sino también aquella generada por el método numérico.

3.3.2 Modelización de la turbulencia vertical

Los modelos de turbulencia vertical se suelen agrupar en dos: aquellos que resuelven las correlaciones de las velocidades directamente, y aquellos otros que hacen una analogía de estos términos con la ley de Fick. Este último tipo de modelos es el que se utilizará, por lo que el problema de cierre de las ecuaciones se reduce al conocimiento de la viscosidad turbulenta vertical. Varios tipos de modelos se han creado para resolver este problema, clasificándose en:

- Modelos de 0 ecuaciones: Utilizan leyes empíricas para el cálculo de la viscosidad turbulenta o el concepto de longitud de mezcla
- Modelos de 1 ecuación: Resuelve una ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta, *modelos k*.
- Modelos de 2 ecuaciones: Resuelve dos ecuaciones de transporte, una para la energía cinética turbulenta y otra para la tasa de disipación de la turbulencia, *modelos k-e* (Rodi, 1987). Otras veces se plantea una ecuación de transporte de una longitud de mezcla o una función de ella en vez de la de la disipación de la turbulencia (Mellor & Yamada, 1982).
- Modelos de 2.5 ecuaciones: Además de las dos ecuaciones de transporte anteriores, tiene en cuenta desvíos de ciertos parámetros que en el anterior tipo de modelos son considerados constantes (Galperin *et al.*, 1988).

En este trabajo se han utilizado modelos de 0 ecuaciones de turbulencia. La mayor parte de estos modelos tienen por base la hipótesis de Prandtl que relaciona la viscosidad turbulenta vertical con el gradiente medio de velocidades a través del cuadrado de la longitud de mezcla l_m

$$A_V = l_m^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = l_m^2 M_p \quad (3.30)$$

siendo M_p la frecuencia de Prandtl. la longitud de mezcla representa una medida de la escala de los remolinos que interactúan con el flujo y depende de la existencia de una capa límite en el fondo y en la superficie así como de la estratificación del medio marino. Esta estratificación se cuantifica a través del número de Richardson R_i , utilizándose para l_m una ecuación del tipo

$$l_m = H \left[\mathbf{x} \left(\frac{z}{H} \right) \mathbf{y} (R_i) \right] \quad (3.31)$$

donde H es la profundidad total y z la distancia al fondo. Se han propuesto varias fórmulas para estimar la función $\mathbf{x}(z/H)$

$$\mathbf{x} \left(\frac{z}{H} \right) = \mathbf{k} \frac{z}{H} \left(1 - \frac{z}{H} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Leendertsee \& Liu, 1978} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{x} \left(\frac{z}{H} \right) = \mathbf{k} \frac{z}{H} \left(1 - \mathbf{d} \frac{z}{H} \right), 0.5 \leq \mathbf{d} \leq 1 \quad \text{Nihoul, 1982} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{x} \left(\frac{z}{H} \right) = 0.1 \operatorname{erf} \left(\frac{4z}{H} \right) \quad \text{Rodi, 1980} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{x} \left(\frac{z}{H} \right) = \mathbf{l} \begin{cases} \mathbf{k} \frac{z}{H}, & 0 \leq \frac{z}{H} < 0.25 \\ 0.1, & 0.25 \leq \frac{z}{H} < 1 \end{cases} \quad \text{Aprox. canales, Nihoul, 1984} \quad (3.35)$$

siendo \mathbf{k} , la constante de Von Karman que toma el valor de 0.4.

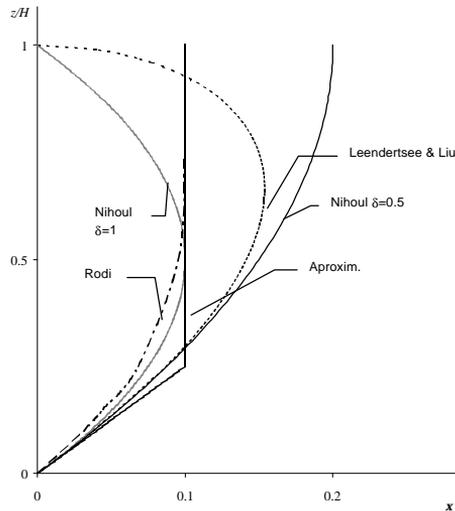


Figura 3.3: Comparación de las diferentes parametrizaciones para la longitud de mezcla.

La última ecuación se suele utilizar como aproximación para flujos en canales bien mezclados. Como se ve en la figura 3.3, en todas las expresiones la longitud de mezcla tiende a κz cuando z tiende a 0, o sea cerca de la capa límite del fondo, lo que está de acuerdo con lo observado en capas límite cerca de una pared.

Como modificador de la capa de mezcla debido a la estratificación se suele aceptar la ley exponencial propuesta por Mamayev en 1958, (Nihoul, 1984).

$$\mathbf{y}(R_i) = e^{-aR_i}, \quad a \approx 0.8 \quad (3.36)$$

Otro tipo de modelos de turbulencia de 0 ecuaciones usa leyes empíricas para el cálculo de la viscosidad turbulenta vertical, donde ésta aparece como la contribución de una parte correspondiente a situaciones de estratificación neutra $(A_V)_0$ corregida por otra que tiene en cuenta la estratificación estable $(A_V)_S$.

$$A_V = (A_V)_{min} + (A_V)_0 \cdot (A_V)_S \quad (3.37)$$

con

$$(A_V)_0 = C_3 H |\bar{V}_H| \quad \text{y} \quad (A_V)_S = (1 + C_4 R_i)^{-C_5} \quad (3.38)$$

siendo $(A_V)_{min}$ un valor mínimo y $|V_H|$ el módulo de la velocidad horizontal en el punto del cálculo de la viscosidad. C_3 , C_4 y C_5 son constantes de calibración del modelo. Backhaus & Hainbucher (1987) proponen valores de $C_4 = 7$ y $C_5 = 0.25$ con $(A_V)_{min} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

3.3.3 Modelización de la difusividad turbulenta

En la dirección horizontal la difusividad turbulenta se puede considerar proporcional a la viscosidad turbulenta horizontal a través de la constante de Prandtl turbulenta para la transferencia de calor o de Schmidt turbulenta para la de masa. Estas constantes suelen ser consideradas iguales entre sí y de orden la unidad (Kundu, 1990).

De forma análoga, en la dirección vertical se suele estimar la difusividad a través de expresiones del tipo

$$K_V = A_V \mathbf{b}(R_i) \quad (3.39)$$

con

$$b(R_i) = g \frac{(1 + 10R_i)^{1/2}}{(1 + 3.33R_i)^{3/2}}, \quad 1 \leq g \leq 2 \quad (\text{Munk \& Anderson, 1948}) \quad (3.40)$$

$$b(R_i) = g \exp(-g'R_i), \quad g \approx 1.4, \quad g' = 1.2 \quad (\text{Leendertsee \& Liu, 1978}) \quad (3.41)$$

Estas expresiones tienen en cuenta la estratificación del medio a través del número de Richardson.

3.4 La importancia de la coordenada vertical

Como se ha visto en los apartados anteriores, la diferencia entre las escalas horizontal y vertical hace que el tratamiento de estas sea completamente diferente. Esto no va a afectar sólo a la forma como se calculan las velocidades y otras variables como la viscosidad turbulenta, sino que también el sistema referencial variará cuando se trate la coordenada vertical. En un principio, el sistema de coordenadas más intuitivo es el cartesiano, tanto en horizontal como en vertical. Así, la batimetría de la zona quedaría reducida a una serie de paralelepípedos y el fondo continuo pasaría a una representación en escalones.

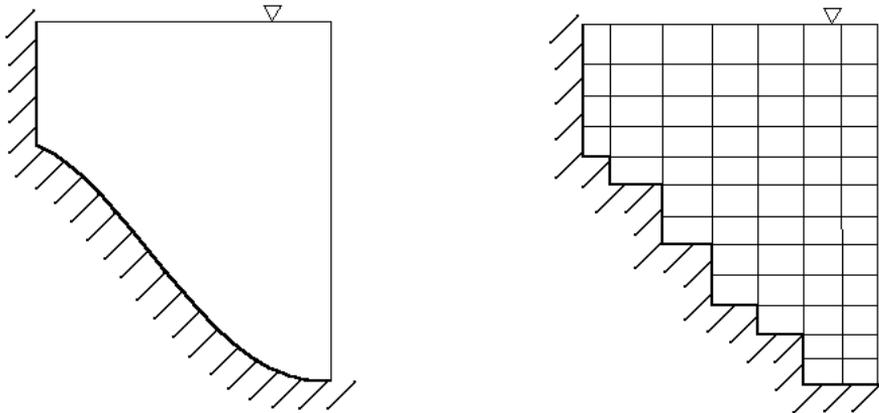


Figura 3.4: Dominio a estudiar (izquierda). Dominio en coordenadas cartesianas (derecha).

La utilización de este tipo de coordenada vertical posee varias desventajas, pero las más importantes provienen de la dificultad de imponer las condiciones de contorno en el fondo y en la superficie, y la poca eficiencia en el

uso de la capacidad computacional al especificar células de cálculo que luego no son utilizadas. Como solución a estos problemas se han propuesto otro tipo de coordenadas. Así, se especifica una coordenada vertical que se ajusta al terreno para la modelización meteorológica (Phillips, 1957). Esta coordenada llamada coordenada \mathbf{s} se convierte en el caso de la modelización del medio marino, en una coordenada que sigue el fondo y la superficie (Nihoul *et al.*, 1986) y cuya ley de transformación es

$$\tilde{x} = x \quad \tilde{y} = y \quad \tilde{z} = \mathbf{s} = \frac{z+h}{H} \quad \tilde{t} = t \quad (3.42)$$

tal y como está representado en la figura 3.5. Las ventajas de la coordenada \mathbf{s} respecto de la coordenada cartesiana son evidentes, tal como se ha dicho antes. Además, posee la propiedad de seguir las líneas de corriente del flujo.

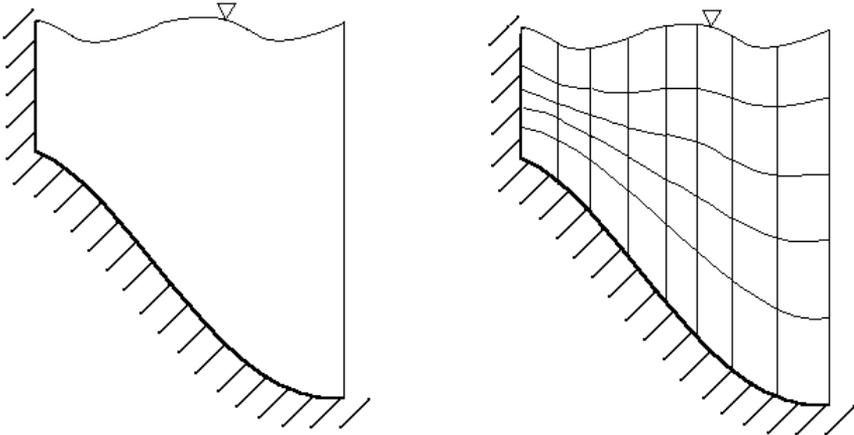


Figura 3.5: Dominio a simular (derecha). Coordenada \mathbf{s} (izquierda).

Sin embargo, este tipo de coordenadas tiene la desventaja de que en regiones de elevado gradiente vertical de densidad, representa la pycnoclina como una línea que atraviesa oblicuamente las capas de \mathbf{s} constante. Para intentar paliar este problema se delimitan dos dominios en la vertical separados por una superficie horizontal y se hace la transformación \mathbf{s} para cada una de ellos (Nihoul & Beckers, 1989). Este tipo de transformación se llama *doble- \mathbf{s}* y evita además una gran acumulación de capas en una zona donde la profundidad es menor que la que posee la mayor parte del dominio.

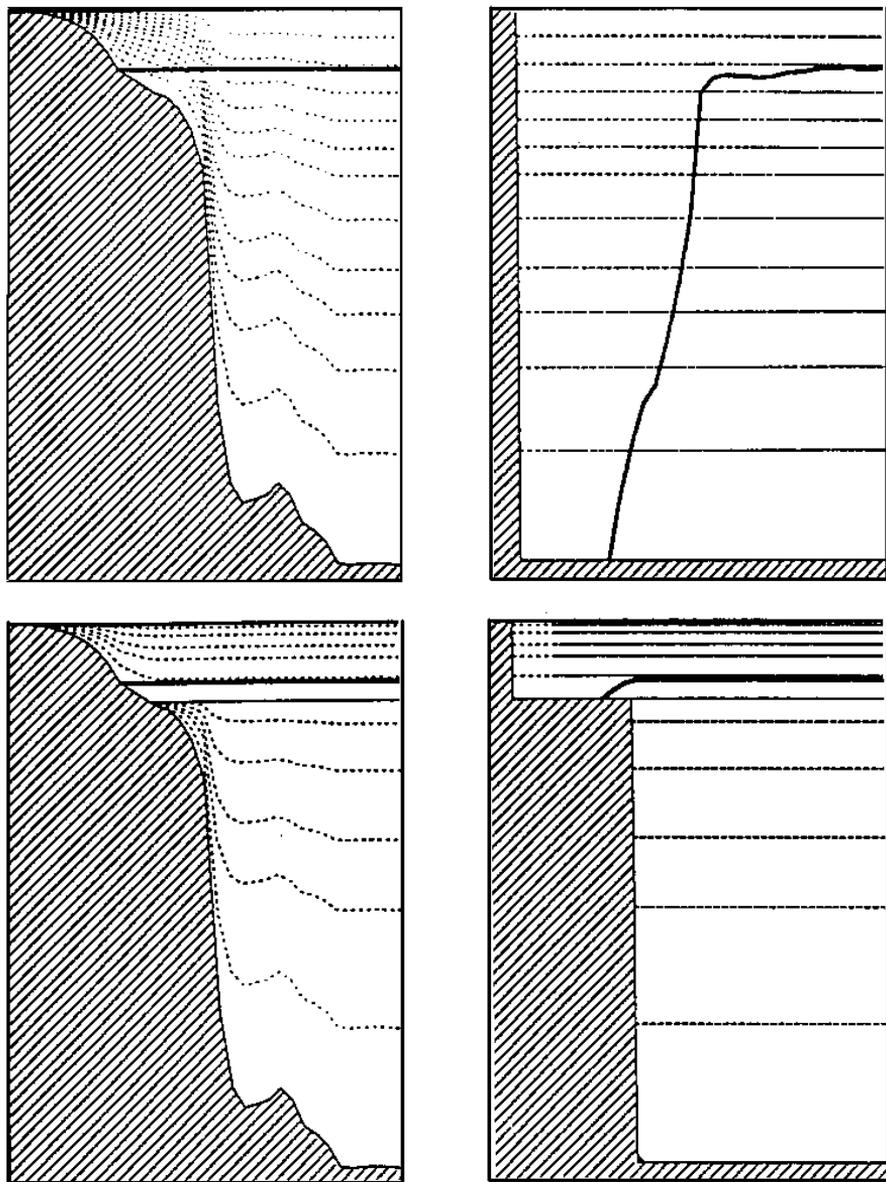


Figura 3.6: Isolíneas σ y posición de la pincloina en el espacio físico y en el espacio de la coordenada sigma (arriba) y doble-sigma (abajo) (Beckers, 1991).

Otro tipo de coordenadas posible para la resolución del problema del cruce de las pincloina es hacer una transformación a coordenadas isopícnicas

(Oberhuber, 1986), es decir $z = r$. Este tipo de coordenada posee el problema de admitir capas de grosor nulo, cuando las isopícnicas intersectan con la batimetría o lo hacen entre sí, por lo que se suelen utilizar sistemas híbridos, mezclados con otros tipos de coordenadas.

En horizontal, también se pueden escoger diferentes tipos de coordenadas aparte del sistema cartesiano. Así, es normal utilizar coordenadas esféricas para áreas grandes o coordenadas curvilíneas más generalizadas cuando por ejemplo se desea que estas, al igual que las coordenadas \mathbf{s} en la vertical, sigan la línea de costa en horizontal. Sin embargo, el sistema cartesiano es el más utilizado en horizontal, al no ser tan desventajosa su utilización como resulta cuando se aplica a la coordenada vertical.

Capítulo 4

4 Resolución Numérica

4.1 Introducción

Debido a la no linealidad de las ecuaciones que describen la dinámica del medio marino, éstas no pueden ser resueltas analíticamente a no ser en situaciones muy simples y con condiciones de contorno no realistas. Por tanto, para conocer la evolución en el tiempo y en el espacio de las propiedades del medio marino se deben obtener algoritmos de resolución a los que se les exigirá rapidez y precisión. La técnica se basa en la discretización del medio continuo, transformando el sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraicas. Este sistema junto con las condiciones iniciales y de contorno conforma el modelo numérico utilizado para la resolución del problema.

Varios modelos han sido propuestos e implementados para la resolución de las ecuaciones hidrodinámicas. Normalmente estos modelos se han discretizado mediante la técnica de las diferencias finitas y elementos finitos. Otro método menos habitual introducido por Rizz & Inouye en 1973 para fluidos tridimensionales (Hirsch, 1988) es el de los volúmenes finitos. Este método se basa en fijar un volumen de control donde se aplicarán de forma macroscópica las leyes de conservación. Frente a las diferencias finitas tiene la ventaja de que este tipo de discretización es conservativo, además del hecho de que el volumen de control se puede adaptar a una malla curva en horizontal. Respecto a los elementos finitos, no precisa de la aplicación de un principio variacional, el cual no es siempre fácil de establecer. En este trabajo se ha utilizado el modelo MOHID3D que ha sido desarrollado en el Instituto Superior Técnico de Lisboa a partir del método de los volúmenes finitos. Debido a que este trabajo no tiene por objetivo una descripción detallada del modelo, en este capítulo se hará una breve exposición del mismo, haciendo sólo hincapié en aquellos aspectos que han sido desarrollados para esta aplicación en la modelización de la Ría de Vigo. Una presentación en detalle del modelo utilizado puede encontrarse en Martins (1999).

4.2 Propiedades y restricciones de la discretización

Las propiedades a tener en cuenta cuando se realiza la discretización de una ecuación dinámica son:

- **Consistencia:** Una ecuación discreta se dice consistente con la ecuación diferencial que le da origen si el error de truncatura tiende a cero cuando los incrementos del tiempo y el espacio tienden a cero independientemente del modo como lo hacen.
- **Convergencia:** La solución de una ecuación discreta es convergente si tiende a la solución del sistema diferencial en cada nodo de la malla cuando los incrementos del tiempo y el espacio tienden a cero.
- **Estabilidad:** Un esquema numérico es estable si los errores introducidos en una iteración no se amplifican según va transcurriendo el cálculo.
- **Propiedad transportativa:** Un esquema numérico respeta esta propiedad si en el cálculo de la convección de un punto de la malla se utilizan valores de la propiedad que estén situados en el sentido del transporte.

- Propiedad conservativa: Se dice que un método posee la propiedad conservativa si el valor total de la propiedad en el interior del dominio no es alterado debido a errores numéricos.
- Causalidad: Significa que cuando hay transporte de energía o masa entre dos puntos, estas variables deben pasar por posiciones intermedias en función de la velocidad del transporte.
- Positividad: Significa que variables como la densidad, la energía cinética turbulenta o la concentración de especies química no pueden ser negativas.

Según el teorema de Lax, la estabilidad y la consistencia son condiciones necesarias y suficientes para asegurar la convergencia de un sistema lineal de ecuaciones. Debido a que se está considerando un sistema no lineal de ecuaciones, el teorema de Lax no puede ser aplicado rigurosamente. En este caso, el teorema está dando condiciones necesarias pero no suficientes para que el esquema sea convergente. Por tanto, una vez comprobada la consistencia de un esquema, se deberá asegurar la estabilidad del mismo. Sin entrar en detalles, esto va a suponer ciertas restricciones a la hora de elegir un paso espacial y un paso temporal, que dependerán del esquema utilizado. Esta es la razón por la que existe una gran cantidad de esquemas de discretización.

4.3 Discretización espacial

En el método de los volúmenes finitos, las ecuaciones de la hidrodinámica son aplicadas de forma macroscópica a un volumen de control, en forma de ecuaciones de balance. Así, una ley general de conservación de un escalar U , con fuentes volúmicas Q en un volumen de control W viene dada por la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_W U dW + \oint_S \vec{F} d\vec{S} = \int_W Q dW \quad (4.1)$$

donde \vec{F} son los flujos del escalar en la superficie S que envuelve al volumen considerado. De forma discreta, aplicándola a un volumen de control W_j donde se define U_j se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_j W_j) + \sum_{\text{caras}} (\vec{F} \cdot \vec{S}) = Q_j W_j \quad (4.2)$$

Quando se establece el tipo de volumen de control que se va a utilizar es necesario que se cumpla que la suma de todos los volúmenes debe cubrir el dominio a estudiar, que las caras adyacentes entre dos volúmenes de control deben coincidir y que los flujos a través de la superficie de las células utilizadas

deben ser independientes de cómo se consideren éstas. Por tanto, y a diferencia de las diferencias finitas, el método del volumen de control permite separar las variables físicas del sistema de la geometría de la malla utilizada. La geometría del volumen de control será calculada para cada iteración y utilizada en el cálculo de las variables. Este esfuerzo adicional de los volúmenes finitos es comparable a la resolución del Jacobiano de la transformación de coordenadas en el caso de las diferencias finitas (Vinokur, 1989).

En la discretización del espacio se ha utilizado un volumen de control para el cálculo de la presión, temperatura, salinidad, etc. como el que muestra la figura 4.1.

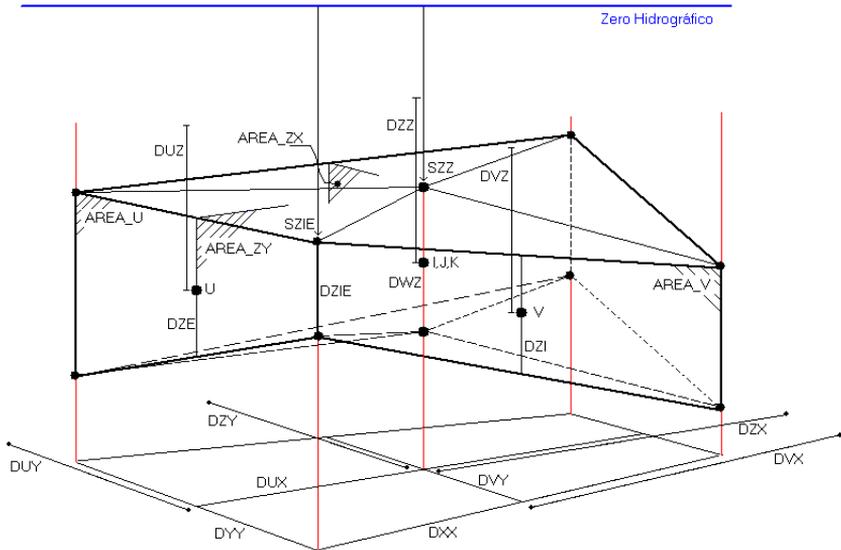


Figura 4.1: Célula para el cálculo de la presión, el cual se realiza en el medio de la célula, punto (i,j,k) . Las líneas oscuras se corresponden a las aristas del volumen. Las componentes de las velocidades son calculadas en los puntos U y V. La velocidad vertical es calculada en la cara de abajo del volumen de control. Son indicadas las distancias y áreas que serán utilizadas a posteriori.

Como se puede ver, en el volumen de control se definen las caras verticales como perpendiculares entre sí, mientras que las caras horizontales son piramidales. Esta restricción adicional permite una mayor rapidez en el cálculo de las áreas y volúmenes de las células. La disposición en horizontal de los puntos de cálculo de las velocidades y elevaciones muestran que el tipo de malla es del tipo Arakawa-C (Arakawa & Lamb, 1977), lo que proporciona unas

condiciones de contorno de fácil implementación, así como un cálculo más sencillo de los flujos convectivos de las magnitudes en las caras del volumen de control. El tipo de volumen de control para el cálculo de las componentes horizontales de la velocidad (u y v) es fácil imaginar a partir del anterior. El hecho de usar este tipo de volumen hace que el tipo de coordenada vertical sea muy versátil. Así, la implementación numérica permite que el sistema pueda ser dividido en vertical en varios dominios y a su vez que cada uno de éstos tenga un tipo de coordenadas diferentes (cartesianas, sigma, isopícnicas,...) al mismo tiempo. La figura 4.2 muestra un ejemplo de este tipo de coordenada vertical.

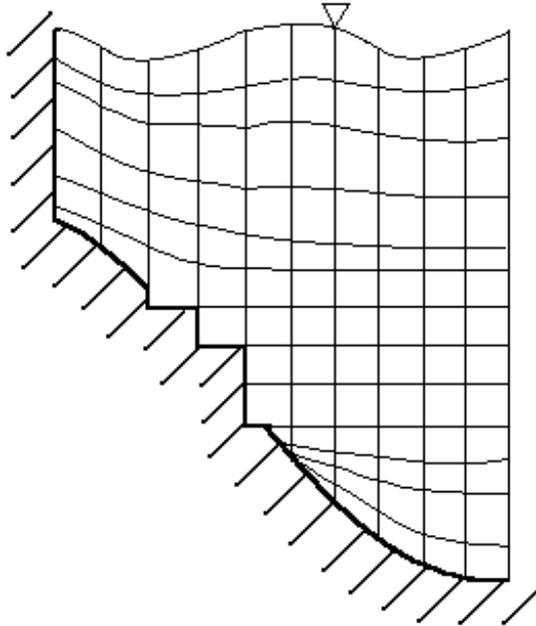


Figura 4.2: Muestra de una sistema dividido en tres dominios con diferente sistema de coordenadas: sigma-cartesiano-sigma.

4.4 Discretización temporal

Un esquema totalmente explícito es inestable o solamente estable para pasos temporales prohibitivamente pequeños. Por otro lado un esquema totalmente implícito conduce a la resolución de matrices con diagonales diversas lo que hace que el tiempo de cálculo sea prohibitivamente grande también. Así pues, se ha estimado que la mejor solución es un esquema mixto. El modelo usa un

esquema semiimplícito de tipo ADI (*Alternating Direction Implicit*) introducido por Peaceman y Racford en 1955 (Fletcher, 1991) donde el cálculo de las componentes de la velocidad se realiza implícitamente de forma alternativa en cada medio paso temporal. Para la resolución de este tipo de esquemas sólo es necesario invertir matrices tridiagonales. Dos esquemas han sido implementados: el S21 de 4 ecuaciones (Abbott *et al.*, 1973) y otro de 6 ecuaciones (Leendertsee, 1967). El cálculo de las distintas variables se muestra en el siguiente esquema para el S21 de 4 ecuaciones, con el paso temporal en superíndices:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{t+1/2}(u^{t+1}, u^t, v^{t+1/2}, v^{t-1/2}) &\rightarrow u^{t+1} \rightarrow w^{*t+1/2} \xrightarrow{\text{Geometry Update}} w^{t+1/2} \rightarrow S^{t+1/2}, T^{t+1/2} \\ &\rightarrow \mathbf{h}^{t+1}(u^{t+1}, u^t, v^{t+3/2}, v^{t+1/2}) \rightarrow v^{t+3/2} \rightarrow w^{*t+1} \xrightarrow{\text{Geometry Update}} w^{t+1} \rightarrow S^{t+1}, T^{t+1} \end{aligned}$$

y para el de 6 ecuaciones:

$$\begin{aligned} v^{t+1/2} &\rightarrow \mathbf{h}^{t+1/2}(u^{t+1/2}, v^t) \rightarrow u^{t+1/2} \rightarrow w^{*t+1/2} \xrightarrow{\text{Geometry Update}} w^{t+1/2} \rightarrow S^{t+1/2}, T^{t+1/2} \\ &\rightarrow u^{t+1} \rightarrow \mathbf{h}^{t+1}(u^{t+1/2}, v^{t+1}) \rightarrow v^{t+1} \rightarrow w^{*t+1} \xrightarrow{\text{Geometry Update}} w^{t+1} \rightarrow S^{t+1}, T^{t+1} \end{aligned}$$

donde la velocidad vertical se va a calcular al principio a través de la ecuación de continuidad (indicada con asterisco), luego se redefine la geometría y se rectifica la velocidad vertical para la nueva geometría. El esquema de 6 ecuaciones es más eficiente para flujos en zonas intermareales debido a que la condición de contorno es calculada para ambas direcciones en cada paso de tiempo, siendo el S21 usado para zonas profundas. En la práctica, para dominios someros, el mayor paso temporal admitido por el esquema de 6 ecuaciones es perdido en el gasto computacional del cálculo de un paso temporal.

4.5 Resolución numérica de las ecuaciones de aguas poco profundas

En este apartado se exponen los algoritmos utilizados para la resolución de las ecuaciones (3.21 – 3.27). Como se ha dicho, una deducción de estos algoritmos y una descripción más detallada se puede encontrar en (Martins *et al.*, 1998; Martins, 1999). La nomenclatura utilizada se referirá a un volumen de control de coordenadas (i, j, k) como el de la figura 4.1, indicando el tiempo en los superíndices y la posición del nodo con los subíndices. Las variables AU y AV denotan las áreas donde se calculan las componentes de las velocidades

horizontales U y V y AZX y AZY son las áreas que atraviesan al volumen de control por el centro en el plano zx e zy respectivamente, tal como muestra la figura 4.1. dt será el paso temporal. El volumen de los volúmenes de control de las variables U y V se representaran como $V_{u_{ijk}}^t$ y $V_{v_{ijk}}^t$.

4.5.1 Elevación de la superficie libre

Integrando la ecuación (3.21) para el primer semipaso temporal se llega en el caso del esquema S21 a

$$\frac{\mathbf{h}_{ij}^{t+1/2} - \mathbf{h}_{ij}^t}{dt/2} = \frac{1}{DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \cdot \left[\frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ijk}^{t+1} \cdot AU_{ijk}^t) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ijk}^t \cdot AU_{ijk}^t)}{2} - \frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ij+1k}^{t+1} \cdot AU_{ij+1k}^t) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ij+1k}^t \cdot AU_{ij+1k}^t)}{2} \right] + \left[\frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{ijk}^{t+1/2} \cdot AV_{ijk}^t) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{ijk}^{t-1/2} \cdot AV_{ijk}^t)}{2} - \frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{i+1jk}^{t+1/2} \cdot AV_{i+1jk}^t) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{i+1jk}^{t-1/2} \cdot AV_{i+1jk}^t)}{2} \right] \quad (4.3)$$

y en el esquema de Leendertsee a

$$\frac{\mathbf{h}_{ij}^{t+1/2} - \mathbf{h}_{ij}^t}{dt/2} = \frac{1}{DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \left[\left\{ \sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ijk}^{t+1/2} \cdot AU_{ijk}^t) - \sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ij+1k}^{t+1/2} \cdot AU_{ij+1k}^t) \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{ijk}^t \cdot AV_{ijk}^t) - \sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{i+1jk}^t \cdot AV_{i+1jk}^t) \right\} \right] \quad (4.4)$$

Los flujos $U \cdot AU$ y $V \cdot AV$ se obtienen de la ecuación del momento. Por cuestiones de estabilidad, los términos de presión barotrópica y de difusión

vertical son calculados implícitamente. Además, la tensión de arrastre del fondo también es calculada implícitamente (Método de Backhaus)

$$\mathbf{t}_{u_{ij}} = \mathbf{r}_0 \cdot r_{u_{ij}} \cdot U_{ij1}^{t+1} \cdot \left| \bar{\mathbf{v}}_{u_{ij}}^t \right| \quad (4.5)$$

bottom

con $r_{u_{ij}}$ el coeficiente de rozamiento. Los términos explícitos se van agrupar bajo el símbolo X_{ijk} . Discretizando la ecuación (3.22) y despejando la componente U de la velocidad se obtiene que el flujo $U \cdot AU$ para el caso del esquema de 4 ecuaciones es

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{kmax} (U_{ijk}^{t+1} \cdot AU_{ijk}^t) &= U_{ij1}^{t+1} \cdot AU_{ij1}^t + \sum_{k=2}^{kmax} (U_{ijk}^{t+1} \cdot AU_{ijk}^t) = \\ \sum_{k=2}^{kmax} (U_{ijk}^t \cdot AU_{ijk}^t) &+ F_{u_{ij}} \left(U_{ij1}^t + \frac{dt \cdot X_{ij1}}{\mathbf{r}_0 \cdot V_{u_{ij1}}^t} \right) AU_{ij1}^t + \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \sum_{k=2}^{kmax} \left(X_{ijk} \frac{AU_{ijk}^t}{V_{u_{ijk}}^t} \right) + \\ \frac{dt}{\mathbf{r}_0} &\left\{ \left(p_{amij-1}^{t+1/2} - p_{amij}^{t+1/2} \right) + g \mathbf{r}^t (\mathbf{h}) \left(\mathbf{h}_{ij-1}^{t+1/2} - \mathbf{h}_{ij}^{t+1/2} \right) \right\} \cdot HT_{u_{ij}}^t \cdot \frac{DYY_{ij}}{DZX_{ij-1}} + \\ (DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij}) \cdot \frac{dt}{\mathbf{r}_0} &\cdot \left\{ \mathbf{t}_{u_{ij}} \cdot \frac{AU_{ijkmax}^t}{V_{u_{ijkmax}}^t} + \left(F_{u_{ij}} \frac{AU_{ij1}^t}{V_{u_{ij1}}^t} - \frac{AU_{ij2}^t}{V_{u_{ij2}}^t} \right) \cdot \right. \\ \left. \left(\mathbf{r}_0 A_{V_{ij-1/2}} \frac{U_{ij2}^t - U_{ij1}^t}{DUZ_{ij1}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

siendo

$$F_{u_{ij}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{dt (DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ij1}}^t} r_{u_{ij}} \cdot \left| \bar{\mathbf{v}}_{u_{ij1}}^t \right| \right)} \quad (4.7)$$

y para el caso de 6 ecuaciones el flujo se halla a partir de

$$\sum_{k=1}^{kmax} (U_{ijk}^{t+1/2} \cdot AU_{ijk}^t) = U_{ij1}^{t+1/2} \cdot AU_{ij1}^t + \sum_{k=2}^{kmax} (U_{ijk}^{t+1/2} \cdot AU_{ijk}^t) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{kmax} \left(U_{ijk}^t \cdot AU_{ijk}^t \right) + F_{u_{ij}} \left(U_{ij1}^t + \frac{dt \cdot X_{ij1}}{2 \cdot \mathbf{r}_0 \cdot V_{u_{ij1}}^t} \right) AU_{ij1}^t + \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \sum_{k=2}^{kmax} \left(X_{ijk} \frac{AU_{ijk}^t}{V_{u_{ijk}}^t} \right) + \\
& \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \left\{ \left(p_{am_{ij-1}}^{t+1/2} - p_{am_{ij}}^{t+1/2} \right) + g \mathbf{r}^t(\mathbf{h}) \left(\mathbf{h}_{ij-1}^{t+1/2} - \mathbf{h}_{ij}^{t+1/2} \right) \right\} \cdot HT_{u_{ij}}^t \cdot \frac{DYY_{ij}}{DZX_{ij-1}} + \\
& \left(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij} \right) \cdot \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \cdot \left\{ \mathbf{t}_{wind}^{u_{ij}} \cdot \frac{AU_{ijkmax}^t}{V_{u_{ijkmax}}^t} + \left(F_{u_{ij}} \frac{AU_{ij1}^t}{V_{u_{ij1}}^t} - \frac{AU_{ij2}^t}{V_{u_{ij2}}^t} \right) \right\} \cdot \\
& \left(\mathbf{r}_0 A_{V_{ij-1/2}} \frac{U_{ij2}^t - U_{ij1}^t}{DUZ_{ij1}} \right) \left. \right\} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

con

$$F_{u_{ij}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{2 \cdot V_{u_{ij1}}^t} r_{u_{ij}} \cdot \left| \vec{v}_{u_{ij1}}^t \right| \right)} \quad (4.9)$$

siendo $HT_{u_{ij}}^t = F_{u_{ij}} \cdot DZE_{ij1} + \sum_{k=2} DZE_{ijk}$.

Sustituyendo estos flujos y los hallados explícitamente en la ecuación de la superficie libre, se obtiene un sistema tridiagonal

$$A \mathbf{h}_{i0}^{t+1/2} + B \mathbf{h}_{i1}^{t+1/2} + C \mathbf{h}_{i2}^{t+1/2} = D \quad (4.10)$$

con los siguientes coeficientes

$$A = - \frac{dt^2 \cdot g \cdot DYY_{ij}}{4 \cdot \mathbf{r}_0 \cdot DUX_{ij} \cdot DVY_{ij} \cdot DZX_{ij-1}} \left(\mathbf{r}_{ij-1/2}^t(\mathbf{h}) \cdot \left\{ (F_{u_{ij}} - 1) DZE_{ij1} + HT_{u_{ij}}^t \right\} \right) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
B = & 1 - \frac{dt^2 \cdot g}{4 \cdot \mathbf{r}_0 \cdot DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \left(\frac{\mathbf{r}_{ij-1/2}^t(\mathbf{h}) \cdot DYY_{ij}}{DZX_{ij-1}} \cdot \left\{ (F_{u_{ij}} - 1) DZE_{ij1} + HT_{u_{ij}}^t \right\} + \right. \\
& \left. \frac{\mathbf{r}_{ij+1/2}^t(\mathbf{h}) \cdot DYY_{ij+1}}{DZX_{ij}} \cdot \left\{ (F_{u_{ij+1}} - 1) DZE_{ij+1} + HT_{u_{ij+1}}^t \right\} \right) \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$C = -\frac{dt^2 \cdot g \cdot D\mathbf{Y}_{ij+1}}{4 \cdot \mathbf{r}_0 \cdot DUX_{ij} \cdot DVY_{ij} \cdot DZX_{ij}} \left(\mathbf{r}_{ij+1/2}^t(\mathbf{h}) \cdot \left\{ (F_{u_{ij+1}} - 1) DZE_{ij+1} + HT_{u_{ij+1}}^t \right\} \right) \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} D = & \mathbf{h}_{ij}^t + \frac{dt}{4 \cdot DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \left[\left\langle \left(1 + F_{u_{ij}} \right) U_{ij1}^t \cdot AU_{ij1}^t + 2 \cdot \sum_{k=2}^{kmax} \left(U_{ijk}^t \cdot AU_{ijk}^t \right) + \right. \right. \\ & + \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \left\{ F_{u_{ij}} \cdot X_{ij1} \frac{AU_{ij1}^t}{V_{u_{ij1}}^t} + \sum_{k=2}^{kmax} \left(X_{ijk} \frac{AU_{ijk}^t}{V_{u_{ijk}}^t} \right) \right\} + \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \left\{ \left(P_{atm_{ij-1}}^{t+1/2} - P_{atm_{ij}}^{t+1/2} \right) \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ (F_{u_{ij}} - 1) DZE_{ij1} + HT_{u_{ij}}^t \right\} \cdot \frac{D\mathbf{Y}_{ij}}{DZX_{ij-1}} + (DZX_{ij-1} \cdot D\mathbf{Y}_{ij}) \cdot \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \cdot \\ & \left. \left\{ \mathbf{t}_{wind} \cdot \frac{AU_{ijkmax}^t}{V_{u_{ijkmax}}^t} + \left(F_{u_{ij}} \frac{AU_{ij1}^t}{V_{u_{ij1}}^t} - \frac{AU_{ij2}^t}{V_{u_{ij2}}^t} \right) \cdot \left(\mathbf{r}_0 A_{V_{ij-1/2}} \frac{U_{ij2}^t - U_{ij1}^t}{DUZ_{ij1}} \right) \right\} \right] - \\ & \left\langle \left(1 + F_{u_{ij+1}} \right) U_{ij+1}^t \cdot AU_{ij+1}^t + 2 \cdot \sum_{k=2}^{kmax} \left(U_{ij+1k}^t \cdot AU_{ij+1k}^t \right) + \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left(F_{u_{ij+1}} \cdot X_{ij+11} \frac{AU_{ij+11}^t}{V_{ij+11}^t} + \sum_{k=2}^{kmax} \left(X_{ij+1k} \frac{AU_{ij+1k}^t}{V_{u_{ij+1k}}^t} \right) \right) \right\rangle + \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \left\{ \left(P_{atm_{ij}}^{t+1/2} - P_{atm_{ij+1}}^{t+1/2} \right) \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ (F_{u_{ij+1}} - 1) DZE_{ij+11} + HT_{u_{ij+1}}^t \right\} \cdot \frac{D\mathbf{Y}_{ij+1}}{DZX_{ij}} + (DZX_{ij} \cdot D\mathbf{Y}_{ij+1}) \cdot \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \cdot \\ & \left. \left\{ \mathbf{t}_{wind} \cdot \frac{AU_{ij+1kmax}^t}{V_{u_{ij+1kmax}}^t} + \left(F_{u_{ij+1}} \frac{AU_{ij+11}^t}{V_{u_{ij+11}}^t} - \frac{AU_{ij+12}^t}{V_{u_{ij+12}}^t} \right) \cdot \left(\mathbf{r}_0 A_{V_{ij+1/2}} \frac{U_{ij+12}^t - U_{ij+11}^t}{DUZ_{ij+11}} \right) \right\} \right] \\ & + \left\langle \sum_{k=1}^{kmax} \left(V_{ijk}^{t+1/2} \cdot AV_{ijk}^t + V_{ijk}^{t-1/2} \cdot AV_{ijk}^t \right) \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{kmax} \left(V_{i+1jk}^{t+1/2} \cdot AV_{ijk}^t + V_{i+1jk}^{t-1/2} \cdot AV_{ijk}^t \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.14)$$

para el caso de 4 ecuaciones. En el de 6 ecuaciones todos los coeficientes son iguales menos el término independiente que queda

$$\begin{aligned}
D = & \mathbf{h}_{ij}^t + \frac{dt}{2 \cdot DUX_{ij} \cdot DUY_{ij}} \left[\left\langle F_{u_{ij}} \cdot U_{ij1}^t \cdot AU_{ij1}^t + \sum_{k=2}^{kmax} (U_{ijk}^t \cdot AU_{ijk}^t) + \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \cdot \right. \right. \\
& \left. \left\langle F_{u_{ij}} \cdot X_{ij1} \frac{AU_{ij1}^t}{V_{u_{ij1}}^t} + \sum_{k=2}^{kmax} \left(X_{ijk} \frac{AU_{ijk}^t}{V_{u_{ijk}}^t} \right) \right\rangle + \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \left\{ \left(P_{atm_{ij-1}}^{t+1/2} - P_{atm_{ij}}^{t+1/2} \right) \right\} \cdot \right. \\
& \left. \left\{ (F_{u_{ij}} - 1) DZE_{ij1} + HT_{u_{ij}}^t \right\} \cdot \frac{DYY_{ij}}{DZX_{ij-1}} + (DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij}) \cdot \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \cdot \right. \\
& \left. \left\langle \mathbf{t}_{wind}^{u_{ij}} \cdot \frac{AU_{ijkmax}^t}{V_{u_{ijkmax}}^t} + \left(F_{u_{ij}} \frac{AU_{ij1}^t}{V_{u_{ij1}}^t} - \frac{AU_{ij2}^t}{V_{u_{ij2}}^t} \right) \cdot \left(\mathbf{r}_0 A_{V_{ij-1/2}} \frac{U_{ij2}^t - U_{ij1}^t}{DUZ_{ij1}} \right) \right\rangle - \right. \\
& \left. \left\langle F_{ij+1} \cdot U_{ij+1}^t \cdot AU_{ij+1}^t + \sum_{k=2} (U_{ij+1k}^t \cdot AU_{ij+1k}^t) + \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \cdot \right. \right. \\
& \left. \left(F_{u_{ij+}} \cdot X_{ij+1} \frac{AU_{ij+1}^t}{V_{u_{ij+1}}^t} + \sum_{k=2}^{kmax} \left(X_{ij+1k} \frac{AU_{ij+1k}^t}{V_{u_{ij+1k}}^t} \right) \right) \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \left\{ \left(P_{atm_{ij}}^{t+1/2} - P_{atm_{ij+1}}^{t+1/2} \right) \right\} \cdot \right. \\
& \left. \left\{ (F_{u_{ij+1}} - 1) DZE_{ij+1} + HT_{u_{ij+1}}^t \right\} \cdot \frac{DYY_{ij+}}{DZX_{ij}} + (DZX_{ij} \cdot DYY_{ij+}) \cdot \frac{dt}{2 \cdot \mathbf{r}_0} \cdot \right. \\
& \left. \left\langle \mathbf{t}_{wind}^{u_{ij+1}} \cdot \frac{AU_{ij+1kmax}^t}{V_{u_{ij+1kmax}}^t} + \left(F_{u_{ij+1}} \frac{AU_{ij+1}^t}{V_{u_{ij+1}}^t} - \frac{AU_{ij+12}^t}{V_{u_{ij+12}}^t} \right) \cdot \left(\mathbf{r}_0 A_{V_{ij+1/2}} \frac{U_{ij+12}^t - U_{ij+11}^t}{DUZ_{ij+11}} \right) \right\rangle \right] \\
& \left[\left\langle \sum_{k=1}^k (X_{ijk} \cdot AV_{ij1}^t) \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{kmax} (V_{+1jk} \cdot AV_{ij1}^t) \right\rangle \right] \quad (4.)
\end{aligned}$$

donde se tiene en cuenta que se han agrupado los términos explícitos en

$$X_{ijk} = F_x + F_b + F_{coriol} + F_{dif.h} \quad (4.16)$$

$$Y_{ijk} = F_y + F_{advect} + F_{b.clin} + F_{coriol} + F_{dif.h} \quad (4.17)$$

A continuación se muestra la discretización de estos términos de una forma simple. El término advectivo se discretiza de la siguiente forma

$$F_{x_{ijk}}^t = \mathbf{r}_0 \left[(U \cdot \text{flux} U)_{ij+1k}^t - (U \cdot \text{flux} U)_{ijk}^t + (U \cdot \text{flux} V)_{i+1jk}^t - \text{advec} \right. \\ \left. (U \cdot \text{flux} V)_{ijk}^t + (U \cdot \text{flux} W)_{ijk+1}^t - (U \cdot \text{flux} W)_{ijk}^t \right] \quad (4.18)$$

donde se utiliza un esquema mixto entre diferencias centrales y *upwind* modulado por \mathbf{g} de la forma

$$(U \cdot \text{flux} U)_{ijk}^t = \left[\mathbf{g} \left(\frac{U_{ij-1/2k}^t + |U_{ij-1/2k}^t|}{2 \cdot U_{ij-1/2k}^t} U_{ij-1k}^t + \frac{U_{ij-1/2k}^t - |U_{ij-1/2k}^t|}{2 \cdot U_{ij-1/2k}^t} U_{ijk}^t \right) \right. \\ \left. + (1 - \mathbf{g}) \frac{U_{ijk}^t + U_{ij-1k}^t}{2} \right] \cdot (AZX_{ij-1k}^t \cdot U_{ij-1/2k}^t) \quad (4.19)$$

y del mismo modo se hace con los otros sumandos de la ecuación (4.18) (James, 1987; Santos, 1995) evitando así la difusión numérica propia de los esquemas *upwind* y preservando la propiedad transportativa. La variable *flux* U se utiliza para designar la componente de la variable mayúscula U de un caudal a través de la superficie de una célula de cálculo de la variable minúscula u . Esta nomenclatura se seguirá a lo largo del texto.

El término baroclínico queda

$$F_{b.clin}^t = \left(g \int_{Z_{u_{ijk}}}^h \left(\mathbf{r}'_{ij-1k, u_{ijk}} - \mathbf{r}'_{ijk, u_{ijk}} \right) dz \right) \cdot AU_{ijk} \quad (4.20)$$

donde $\mathbf{r}'_{ijk, u_{ijk}}$ es la anomalía de la densidad en el punto de cálculo U_{ijk} y $Z_{u_{ijk}}$ su profundidad.

El término de Coriolis es

$$F_{cor.}^{t+1/2} = \mathbf{r}_0 \cdot V_{u_{ijk}}^t \cdot f_{ij-1/2} \cdot \frac{V_{i+1, j-1/2}^{t+1/2} - V_{ij-1/2}^{t+1/2}}{2} \quad (4.21)$$

Los flujos de la difusión horizontal son para la dirección x

$$F_{difxx}^t = \mathbf{r}_0 \left(A_{H_{ij-1k}}^t \frac{U_{ijk}^t - U_{ij-1k}^t}{DUX_{ij-1}} \cdot AZX_{ij-1k}^t - A_{H_{ijk}}^t \frac{U_{ij+1k}^t - U_{ijk}^t}{DUX_{ij}} \cdot AZX_{ijk}^t \right) \quad (4.22)$$

y en la dirección y

$$F_{x_{ijk}}^t = \mathbf{r}_0 \left(A_{H_{i-1/2,j-1/2k}}^t \frac{U_{ijk}^t - U_{i-1,jk}^t}{DUX_{i-1,j}} \cdot \frac{AV_{ijk}^t + AV_{ij-1k}^t}{2} - \right. \\ \left. A_{H_{i+1/2,j-1/2k}}^t \frac{U_{i+1,jk}^t - U_{ijk}^t}{DUX_{ij}} \cdot \frac{AV_{i+1,jk}^t + AV_{i+1,j-1k}^t}{2} \right) \quad (4.23)$$

La elevación para el segundo semipaso se halla de forma similar sustituyendo los flujos de las velocidades en

$$\frac{\mathbf{h}_{ij}^{t+1} - \mathbf{h}_{ij}^{t+1/2}}{dt/2} = \frac{1}{DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \cdot \left[\frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ijk}^{t+1} \cdot AU_{ijk}^{t+1/2}) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ijk}^t \cdot AU_{ijk}^{t+1/2})}{2} - \right. \\ \left. \frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ij+1k}^{t+1} \cdot AU_{ij+1k}^{t+1/2}) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ij+1k}^t \cdot AU_{ij+1k}^{t+1/2})}{2} \right] + \\ \left[\frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{ijk}^{t+3/2} \cdot AV_{ijk}^{t+1/2}) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{ijk}^{t+1/2} \cdot AV_{ijk}^{t+1/2})}{2} - \right. \\ \left. \frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{i+1,jk}^{t+3/2} \cdot AV_{i+1,jk}^{t+1/2}) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{i+1,jk}^{t+1/2} \cdot AV_{i+1,jk}^{t+1/2})}{2} \right] \quad (4.24)$$

para el esquema de 4 ecuaciones y para el esquema de 6 en

$$\frac{\mathbf{h}_{ij}^{t+1} - \mathbf{h}_{ij}^{t+1/2}}{dt/2} = \frac{1}{DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \left[\left[\sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ijk}^{t+1/2} \cdot AU_{ijk}^{t+1/2}) - \sum_{k=1}^{k_{\max}} (U_{ij+1k}^{t+1/2} \cdot AU_{ij+1k}^{t+1/2}) \right] \right. \\ \left. + \left[\sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{ijk}^{t+1} \cdot AV_{ijk}^{t+1/2}) - \sum_{k=1}^{k_{\max}} (V_{i+1,jk}^{t+1} \cdot AV_{i+1,jk}^{t+1/2}) \right] \right] \quad (4.25)$$

4.5.2 Velocidad horizontal

Para el cálculo de la velocidad horizontal con la ecuación (3.22) se utilizan los mismos términos que en el cálculo de la elevación de la superficie libre pudiéndose ya calcular también el término barotrópico de forma explícita, pues es conocida la elevación de la superficie libre en ese instante. Los términos difusivos verticales sin embargo son calculados implícitamente, por cuestiones de estabilidad.

$$\begin{aligned}
 \frac{U_{ijk}^{t+1} - U_{ijk}^t}{dt} &= \frac{1}{\mathbf{r}_0 \cdot V_{u_{ijk}}^t} \left\{ \left[\left(P_{atm_{ij-1}}^{t+1/2} - P_{atm_{ij}}^{t+1/2} \right) + g \mathbf{r}_{ij-1/2}^t (\mathbf{h}) (\mathbf{h}_{ij-1}^{t+1/2} - \mathbf{h}_{ij}^{t+1/2}) \right] \right. \\
 &AU_{ijk}^t + g \cdot AU_{ijk}^t \cdot \sum_{n=k}^{kmax} \left[\left(\mathbf{r}_{ij-1n_{u_{ijk}}}^{t'} - \mathbf{r}_{ijn_{u_{ijk}}}^{t'} \right) \cdot DZE_{ijn}^t \right] + \\
 &\mathbf{r}_0 \cdot (DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij}) \cdot \left(A_{V_{ij-1/2k}} \frac{U_{ijk+1}^{t+1} - U_{ijk}^{t+1}}{DUZ_{ijk}^t} - A_{V_{ij-1/2k-1}} \frac{U_{ijk}^{t+1} - U_{ijk-1}^{t+1}}{DUZ_{ijk-1}^t} \right) + \\
 &\mathbf{r}_0 \cdot V_{u_{ijk}}^t \cdot \frac{V_{i+1,j-1/2}^{t+1/2} - V_{ij-1/2}^{t+1/2}}{2} \cdot f_{i,j-1/2} + \mathbf{r}_0 \left[(U \cdot ufluxU)_{ij+1k}^t - (U \cdot ufluxU)_{ijk}^t + \right. \\
 &(U \cdot ufluxV)_{i+1jk}^t - (U \cdot ufluxV)_{ijk}^t + (U \cdot ufluxW)_{ijk+1}^t - (U \cdot ufluxW)_{ijk}^t \left. \right] + \\
 &\mathbf{r}_0 \left(A_{H_{ijk}} \frac{U_{ij+1k}^t - U_{ijk}^t}{DUX_{ij}} AZX_{ijk}^t - A_{H_{ij-1k}} \frac{U_{ijk}^t - U_{ij-1k}^t}{DUX_{ij-1}} AZX_{ij-1k}^t + \right. \\
 &+ A_{H_{i+1/2,j-1/2k}} \frac{U_{i+1jk}^t - U_{ijk}^t}{DUY_{ij}} \frac{AV_{i+1jk}^t + AV_{i+1j-1k}^t}{2} \\
 &\left. - A_{H_{i-1/2,j-1/2k}} \frac{U_{ijk}^t - U_{i-1jk}^t}{DUY_{i-1j}} \frac{AV_{ijk}^t + AV_{ij-1k}^t}{2} \right) \left. \right\} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

dando lugar a un sistema tridiagonal

$$AU_{ijk-1}^{t+1} + BU_{ijk}^{t+1} + CU_{ijk+1}^{t+1} = D \quad (4.27)$$

siendo

$$A = \left(-\frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ijk}}^t} \cdot \frac{A_{V_{ij-\frac{1}{2}k-1}}}{DUZ_{ijk-1}^t} \right) \quad (4.28)$$

$$B = \left[1 + \frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ijk}}^t} \cdot \left(\frac{A_{V_{ij-\frac{1}{2}k-1}}}{DUZ_{ijk-1}^t} + \frac{A_{V_{ij-\frac{1}{2}k}}}{DUZ_{ijk}^t} \right) \right] \quad (4.29)$$

$$C = \left(-\frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ijk}}^t} \cdot \frac{A_{V_{ij-\frac{1}{2}k}}}{DUZ_{ijk}^t} \right) \quad (4.30)$$

$$D = U_{ijk}^t + TIU_{ijk} \quad (4.31)$$

denominando TIU_{ijk} a los términos explícitos.

En el cálculo de la velocidad horizontal, los coeficientes de la triagonal en la capa superior ($k = kmax$) quedan

$$A = -\frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ijkmax}}^t} \cdot \frac{A_{V_{ij-\frac{1}{2}kmax-1}}}{DUZ_{ijkmax-1}^t} \quad (4.32)$$

$$B = 1 + \frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ijkmax}}^t} \cdot \frac{A_{V_{ij-\frac{1}{2}kmax-1}}}{DUZ_{ijkmax-1}^t} \quad (4.33)$$

$$C = 0 \quad (4.34)$$

$$D = U_{ijkmax}^t + TIU_{ijkmax} + \frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ijkmax}}^t} \cdot \frac{\mathbf{t}_{u_{ij}}^{t+1}}{\mathbf{r}_0} \quad (4.35)$$

donde $\mathbf{t}_{u_{ij}}^{t+1}$ se refiere a la componente x de la tensión del viento calculada en la célula U .

En el fondo ($k = 1$), el tensor utilizado en el momento recoge el rozamiento del medio marino con la superficie terrestre. Como ya se ha dicho anteriormente, este tensor debe ser calculado implícitamente, teniendo la forma

$$\mathbf{t}_{u_{ij}}^{t+1} = \mathbf{r}_0 \cdot r_{u_{ij}} \cdot U_{ij1}^{t+1} \cdot \left| \bar{v}_{u_{ij1}}^t \right| \quad (4.36)$$

bottom

y así los coeficientes de la matriz tridiagonal quedan

$$A = 0 \quad (4.37)$$

$$B = 1 + \frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ij1}}^t} \cdot \left(\frac{A_{V_{ij-1/2}^1}}{DUZ_{ij1}^t} + r_{u_{ij}} \cdot \left| \bar{v}_{u_{ij1}}^t \right| \right) \quad (4.38)$$

$$C = - \frac{dt(DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij})}{V_{u_{ij1}}^t} \cdot \frac{A_{V_{ij-1/2}^1}}{DUZ_{ij1}^t} \quad (4.39)$$

$$D = U_{ij1}^t + TIU_{ij1} \quad (4.40)$$

donde

$$\left| \bar{v}_{u_{ij1}}^t \right| = \sqrt{\left(U_{ij1}^t \right)^2 + \left(V_{i+1/2, j-1/2}^{t+1/2} \right)^2} \quad (4.41)$$

De forma análoga se calcula la velocidad en el caso del esquema de 6 ecuaciones pero ahora la velocidad estará centrada en $t+1/2$. También de forma análoga se realiza este cálculo para las velocidades en la dirección y , discretizando en ese caso la ecuación (3.23).

4.5.3 Velocidad vertical

Para hallar la velocidad vertical se recurre a la ecuación de la continuidad (3.24). Se va a considerar el siguiente proceso. Se halla una velocidad vertical provisional W^* considerando que la malla está fija, comenzando desde la primera capa y subiendo hasta la superficie

$$W_{ijk+1}^{*t+1/2} = W_{ijk}^{*t+1/2} + \frac{1}{DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \cdot \left(wfluxU_{ijk}^{t+1/2} + wfluxV_{ijk}^{t+1/2} - wfluxU_{ij+1k}^{t+1/2} - wfluxV_{i+1, jk}^{t+1/2} \right) \quad (4.42)$$

donde

$$wfluxU_{ijk}^{t+1/2} = AU_{ijk}^t \cdot U_{ijk}^{t+1} ; wfluxV_{ijk}^{t+1/2} = AV_{ijk}^t \cdot V_{ijk}^{t+1/2} \quad (4.43)$$

Se mueve la malla en función de los cambios producidos en el cálculo de la velocidad vertical hallada y se redefinen todas las magnitudes geométricas a partir de este cambio

$$SZZ_{ijk}^{t+1/2} = SZZ_{ijk}^t - W_{ijk+1}^{*t+1/2} \cdot dt/2 \quad (4.44)$$

Una vez que se ha definido la geometría de nuevo y teniendo en cuenta la variación de volumen en la ecuación de la continuidad para un fluido incompresible

$$\frac{\int V_z}{\int t} = wfluxU_{in} + wfluxV_{in} + wfluxW_{in} - wfluxU_{out} - wfluxV_{out} - wfluxW_{out} \quad (4.45)$$

donde Vol se refiere al volumen, $wfluxX_{in}$ y $wfluxX_{out}$ indican los flujos entrantes y salientes a través de las caras paralelas a la coordenada x y así sucesivamente, se puede hallar la velocidad vertical calculada en la nueva geometría

$$W_{ijk+1}^{t+1/2} = W_{ijk}^{t+1/2} + \frac{1}{DUX_{ijk} \cdot DVY_{ijk}} \left(AU_{ijk}^t \cdot U_{ijk}^t + AV_{ijk}^t \cdot V_{ijk}^{t+1/2} - AU_{ij+1k}^t \cdot U_{ij+1k}^t - AV_{i+1jk}^t \cdot V_{i+1jk}^{t+1/2} - \frac{V_z^{t+1/2} - V_z^t}{dt/2} \right) = W_{ijk}^{t+1/2} + W_{ijk+1}^{*t+1/2} - W_{ijk}^{*t+1/2} - \frac{V_z^{t+1/2} - V_z^t}{\{(dt/2) \cdot DUX_{ijk} \cdot DVY_{ijk}\}} \quad (4.46)$$

siendo V_z el volumen de la célula de cálculo de la presión.

Esta velocidad es la que se necesita para el cálculo hidrodinámico, y se calculará cada medio paso. Sin embargo, a veces es necesaria calcular la velocidad real, es decir, aquella que esté en un sistema cartesiano de coordenadas, sobre todo para la representación y el correcto análisis de los resultados. Para ello no hay mas que aplicarle la ley inversa de transformación del sistema de coordenadas, o lo que es lo mismo

$$W_{real} = W_{calc} - \frac{\int S_{zz}}{\int t} - u \frac{\int S_{zz}}{\int x} - v \frac{\int S_{zz}}{\int y} \quad (4.47)$$

siendo S_{zz} la coordenada vertical de las capas en coordenadas cartesianas.

4.5.4 Densidad

La densidad será calculada también cada medio paso usando la ecuación de estado en función de la salinidad y la temperatura. Por tanto, estas magnitudes escalares serán calculadas cada medio paso a través de sus ecuaciones de transporte (3.25, 3.26). En la aproximación del volumen de control, la discretización se va a realizar sobre las células de cálculo de las elevaciones. Como estas ecuaciones son resueltas después de la redefinición de la geometría se utilizan los valores nuevos de las velocidades y de las áreas. Por ejemplo, para la ecuación de transporte de la salinidad y denominando $zfluxU$ los flujos en la cara de cálculo de U en la célula de la presión y así sucesivamente, quedaría

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{ijk}^{t+1/2} - S_{ijk}^t}{dt/2} = & \frac{1}{V_{z_{ijk}}^{t+1/2}} \left[\left((S^t \cdot zfluxU^{t+1})_{ijk} - (S^t \cdot zfluxU^{t+1})_{ij+1k} + \right. \right. \\
 & \left. \left(S^t \cdot zfluxV^{t+1/2} \right)_{ijk} - (S^t \cdot zfluxV^{t+1/2})_{i+1jk} + \right. \\
 & \left. \left(S^{t+1/2} \cdot zfluxW^{t+1/2} \right)_{ijk} - (S^{t+1/2} \cdot zfluxW^{t+1/2})_{ijk+1} \right] + \\
 & \left(DUX_{ij} \cdot DVI_{ij} \right) \cdot \left(K_{v_{ijk}} \frac{S_{ijk+1}^{t+1/2} - S_{ijk}^{t+1/2}}{DZZ_{ijk}^{t+1/2}} - K_{v_{ijk-1}} \frac{S_{ijk}^{t+1/2} - S_{ijk-1}^{t+1/2}}{DZZ_{ijk-1}^{t+1/2}} \right) + \\
 & \left(K_{H_{ij+1/2k}} \frac{S_{ij+1k}^t - S_{ijk}^t}{DZX_{ijk}} \cdot AU_{ij+1k}^{t+1/2} - K_{H_{ij-1/2k}} \frac{S_{ijk}^t - S_{ij-1k}^t}{DZX_{ij-1k}} \cdot AU_{ijk}^{t+1/2} \right) + \\
 & \left(K_{H_{i+1/2jk}} \frac{S_{i+1jk}^t - S_{ijk}^t}{DZY_{ijk}} \cdot AV_{i+1jk}^{t+1/2} - K_{H_{i-1/2jk}} \frac{S_{ijk}^t - S_{i-1jk}^t}{DZY_{i-1jk}} \cdot AV_{ijk}^{t+1/2} \right) \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

Como se puede comprobar, los términos de advección y difusión vertical son implícitos, dando lugar a un sistema tridiagonal que, del mismo modo que los anteriores, es resuelto mediante el algoritmo de Thomas. Los términos advectivos son discretizados también con un esquema mixto *upwind* - diferencias centrales.

Las condiciones de frontera en la superficie se imponen a través de un tensor análogo al tensor de esfuerzos para la ecuación de la velocidad horizontal pero en este caso representan los intercambios de calor y masa que se producen en la superficie del mar. En el fondo, se utilizan condiciones de flujo nulo. En el siguiente capítulo se profundizará en la implementación de estas y otras condiciones, conocidas todas ellas como condiciones de contorno.

Capítulo 5

5 Condiciones Iniciales y de Frontera

5.1 Introducción

Para la resolución del sistema de ecuaciones es necesaria la especificación de las condiciones iniciales y de frontera. Además, va a ser a través de estas condiciones de donde va a proceder el forzamiento del sistema en la mayoría de los casos. Una vez introducida una pequeña especificación de las condiciones iniciales, se introducen las parametrizaciones de los intercambios de momento, salinidad y temperatura en la superficie y en el fondo, para luego tratar los límites geográficos del medio marino, esto es, las fronteras cerradas y móviles. El hecho de que el sistema tenga una limitación de espacio da lugar a las fronteras abiertas, que serán tratadas al final del capítulo, haciendo hincapié en las distintas condiciones usadas para dar cuenta de esta frontera y en especial, debido a su complejidad, en la implementación de las condiciones de radiación.

5.2 Condiciones iniciales

La condición inicial del momento suele considerarse nula, con la elevación inicial constante para todo el dominio. Esta condición inicial, al ser irreal, hace conveniente que al comienzo de una simulación, el modelo pase un cierto tiempo de relajación, denominado *spin up*, en el cual la velocidad y la elevación adquieran un régimen normal. En este tiempo de transición, el paso temporal será menor y la viscosidad turbulenta mayor que los valores que se pretenden utilizar para estas dos variables, con la intención de destruir los gradientes que pudiesen surgir en el comienzo de la simulación y prevenir la inestabilidad del sistema. Estos parámetros se irán adecuando progresivamente a su valor deseado. El tiempo de transición depende del fenómeno a estudiar, siendo del orden de 1 o 2 días para la simulación de la onda de marea en un estuario.

Los campos de salinidad y temperatura iniciales suelen crearse a partir de datos de medidas de campo. Debido a que todos los nodos de la malla necesitan un valor inicial, estos suelen ser hallados a través de la interpolación de los datos medidos, lo que da campos de temperatura y salinidad irrealistas. Una forma simple de iniciar consiste en utilizar una interpolación bilineal en horizontal y un período de *spin up* lo suficientemente largo para destruir los gradientes irrealistas que surgen de esta interpolación. Nuevos tipos de interpolaciones más complejas reducen la inconsistencia de estas condiciones iniciales. Otra forma de inicialización consiste en considerar que el término de forzamiento baroclínico es nulo al principio y se va aumentando su forzamiento progresivamente hasta su valor verdadero.

5.3 Condiciones en la superficie

Para expresar el hecho de la inexistencia de un flujo de agua de mar a través de la superficie se usa como condición en esta frontera la denominada condición cinemática. Ésta está implícitamente incluida en las ecuaciones anteriores al ser utilizada en la deducción de la ecuación de la superficie libre. A parte de esta, las condiciones de contorno en la superficie se corresponden a los intercambios de momento, calor y masa existentes entre la superficie libre del mar y la atmósfera.

En el caso del momento, el flujo de éste es debido principalmente al arrastre de la superficie marina por el viento. Este flujo es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad del viento a una altura dada que se

toma como referencia, la cual suele ser 10 m. El tensor de esfuerzo en la superficie se expresa por tanto de la siguiente manera

$$\mathbf{t}_{wind} = -\mathbf{r}_a C_{10} |\vec{V}_{10}| \vec{V}_{10} \quad (5.1)$$

donde \mathbf{r}_a es la densidad del aire al nivel de la superficie libre ($\mathbf{r}_a \approx 1 \text{ kg m}^{-3}$). \vec{V}_{10} es la velocidad del viento a 10 m de altura, y C_{10} es un coeficiente de arrastre del viento, para el que se han propuesto varias relaciones empíricas, debido a la forma cambiante de la superficie del mar. Así, debe quedar reflejado el hecho de que a mayor viento, la resistencia ejercida por éste sobre la superficie marina es mayor por causa de la formación de ondas. Algunas de estas fórmulas propuestas son:

$$C_{10} = 0.9 \cdot 10^{-3}, \quad 10 \text{ ms}^{-1} < |\vec{V}_{10}| < 23 \text{ ms}^{-1} \quad (\text{Rossby \& Montgomery, 1935}) \quad (5.2)$$

$$C_{10} = (2.4 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}, \quad 10 \text{ ms}^{-1} < |\vec{V}_{10}| \quad (\text{Wilson, 1966; Hasse, 1974}) \quad (5.3)$$

$$C_{10} = 1.2 \cdot 10^{-3}, \quad |\vec{V}_{10}| \approx 10 \text{ ms}^{-1} \quad (\text{Smith, 1974}) \quad (5.4)$$

$$C_{10} = (0.98 + 0.14 |\vec{V}_{10}|) \cdot 10^{-3} \quad (\text{Nihoul, 1977}) \quad (5.5)$$

$$C_{10} = 1.14 \cdot 10^{-3}, \quad 4 \text{ ms}^{-1} < |\vec{V}_{10}| < 11 \text{ ms}^{-1} \quad (\text{Large \& Pond, 1981}) \quad (5.6)$$

Para la especificación de los flujos de calor y masa en la superficie se utilizan dos tipos de metodología diferente o una combinación de ambas. El primero consiste en el cálculo directo de estos flujos, teniendo en cuenta los fenómenos que contribuyen a la transferencia de estas cantidades en la interfase atmósfera-oceano. Así, los intercambios de calor y masa vienen dados por

$$\left(K_V \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\mathbf{D}F_s + \mathbf{D}F_l - F_T^a - L_e F_L^a}{\mathbf{r}_o c_p} \quad (5.7)$$

$$\left(K_V \frac{\partial S}{\partial z} \right) = \frac{-(F_p^a + F_L^a) c^s}{\mathbf{r}_o} \quad (5.8)$$

donde F_T^a es el flujo de calor sensible hacia la atmósfera al nivel de la superficie libre, DF_s es la diferencia entre los flujos de radiación de onda corta absorbida y emitida, DF_l , la diferencia de los flujos de radiación de onda larga absorbida y emitida, F_L^a es el flujo de vapor de agua en la atmósfera al nivel de la superficie libre, L_e es el calor latente de evaporación y c_p es el calor específico del agua a presión constante. En la ecuación de la transferencia de masa F_p^a es el flujo global de precipitación- evaporación y c^s la salinidad en la superficie. Estos flujos se encuentran relacionados a través de fórmulas empíricas con magnitudes de más fácil medición (Nihoul, 1984).

Otra forma de especificar estas transferencias es mediante la técnica de relajación a valores climatológicos conocidos. Esta técnica permite solventar las dificultades provenientes de la falta de precisión en los valores que son necesarios suministrar a las fórmulas anteriores. Así, los flujos en la superficie de la salinidad y temperatura vendrían dados (Beckers *te al.*, 1996) por

$$\left(K_V \frac{\partial T}{\partial z} \right) = C_T (T - T_C) \quad (5.9)$$

$$\left(K_V \frac{\partial S}{\partial z} \right) = C_S (S - S_C) \quad (5.10)$$

donde T_C y S_C son los valores climatológicos hacia los que se quieren relajar la temperatura y salinidad. C_T y C_S indican la velocidad de relajación. Así, un valor de $C_T = 0.5 \text{ m día}^{-1}$ significa que una capa bien mezclada de 30 m de espesor tardará 60 días para ajustarse al valor propuesto, lo que corresponde un coeficiente de intercambio de calor de $25 \text{ Wm}^{-2} \text{ °C}^{-1}$, o lo que es lo mismo, para una anomalía de la temperatura $T - T_C$ de 1° C un flujo de 25 Wm^{-2} es impuesto en la superficie. A los modelos que utilizan este tipo de fronteras se les denomina modelos de semidiagnóstico.

5.4 Condiciones en el fondo

En el fondo sólo se tiene en cuenta el flujo de momento, considerando nulos los flujos de calor y masa, lo que significa para la primera variable que el mar está en equilibrio térmico con el fondo y para la segunda es equivalente a una condición de impenetrabilidad. Para la componente normal del momento, también se considera una condición de impenetrabilidad, o sea,

$$w_{z=0} = 0 \quad (5.11)$$

En el caso de la componente tangencial de la velocidad, la capa límite no puede ser resuelta numéricamente sin utilizar un número elevadamente prohibitivo de niveles de cálculo cerca del fondo. Se supone, por tanto, una condición de rozamiento de flujo turbulento similar a la de la superficie libre, quedando el tensor de esfuerzo como

$$\mathbf{t}_{bottom} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r} \cdot |\vec{V}_t| \vec{V}_t \quad (5.12)$$

Si se considera un dominio poco profundo \vec{V}_t representa la velocidad media en profundidad y r el coeficiente rozamiento que se calcula con la rugosidad de Manning C_m

$$r = g C_m^2 R_h^{-3} \quad (5.13)$$

siendo R_h el radio hidráulico (White, 1994).

En vez de calcular así el tensor de esfuerzo, puede suponerse un perfil logarítmico, y entonces en la ecuación (5.12) \vec{V}_t representa a la velocidad calculada más cercana al fondo y

$$r = \mathbf{k}^2 / \left(\ln \frac{z}{z_0} \right)^2 \quad (5.14)$$

con $\mathbf{k} \approx 0.4$, la constante de Von Karman, z la distancia al fondo del punto de cálculo de la velocidad, y z_0 la rugosidad característica.

5.5 Fronteras cerradas

Se supone que el flujo del agua no puede penetrar en las paredes laterales sólidas, por lo que éstas se van a considerar fronteras cerradas, con condiciones semejantes al fondo. Por tanto, la velocidad normal a las paredes será nula. La velocidad tangencial debería de considerarse también nula para cumplir la condición de no deslizamiento, pero debido a que el paso espacial horizontal es excesivamente grande para resolver la capa límite, se sustituye esta condición por un flujo difusivo que, en particular, se puede aproximar a cero. Resumiendo, las condiciones para las fronteras cerradas laterales pueden expresarse como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} = 0 \quad (5.15)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.16)$$

siendo \bar{n} un vector normal a la superficie lateral. Para la salinidad y la temperatura se considera, al igual que en el fondo, flujo nulo.

5.6 Fronteras móviles

Estas fronteras se utilizan para representar la situación que ocurre cuando la marea cubre y descubre ciertas zonas del área a modelizar, como por ejemplo en los bancos de arena, lo cual hace que la frontera lateral del agua se desplace. La localización de esta frontera viene dada por la imposición de la profundidad total nula, una vez que se considera la profundidad negativa ($h_{ij} < 0$) en las zonas donde descubre

$$H_{ij} = \mathbf{h}_{ij} + h_{ij} = 0 \quad (5.17)$$

Por razones computacionales, esta condición no puede ser usada para decidir si la célula está descubierta o no. Se utiliza en cambio una condición como la representada en la siguiente figura

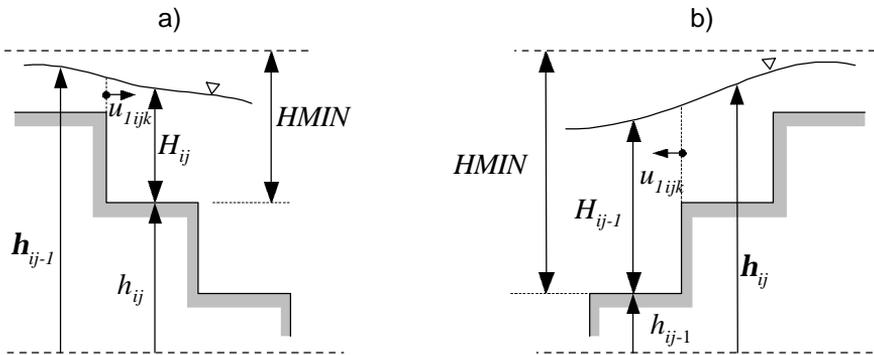


Figura 5.1: Condición para células descubiertas, a) frontera izquierda, b) frontera derecha.

siendo $HMIN$ la profundidad mínima por debajo de la cual descubre. Por tanto, la velocidad \bar{u}_{1ijk} es nula cuando se cumple al menos una de estas condiciones

$$(i) \quad H_{ij} < HMIN \quad \text{y} \quad \mathbf{h}_{ij-1} < -h_{ij} + HMIN \quad (5.18)$$

$$(ii) \quad H_{ij-1} < HMIN \quad \text{y} \quad \mathbf{h}_{ij} < -h_{ij-1} + HMIN \quad (5.19)$$

Para la salinidad y la temperatura también se considera una profundidad mínima HMINB a partir de la cual se calculan sus valores, permaneciendo constantes por el contrario, cuando la profundidad total de la célula sea menor que ésta.

La elección adecuada de HMIN y HMINB hace que sean atenuadas las perturbaciones numéricas introducidas con estas fronteras móviles, causadas por la variación discontinua de las velocidades (Leendertsee, 1970; Stelling, 1983).

5.7 Fronteras abiertas

Normalmente se ha entendido como fronteras abiertas a aquellas fronteras artificiales que dejan salir con la mínima reflexión las ondas generadas dentro del dominio de cálculo (Røed & Cooper, 1986). Por claridad, en este trabajo se denominará frontera abierta a cualquier frontera artificial que surge de la limitación del área que se quiere estudiar, o sea, aquella que separa el medio marino que es modelizado con el que queda fuera del modelo. Estas fronteras son las más problemáticas a la hora de modelizar, debido al hecho de ser artificiales y a que deben de permitir que la onda se propague a través de la frontera y el fluido pase libremente por ésta. En la actualidad, el problema de las fronteras abiertas no ha sido resuelto todavía, esto es, no existe una sola forma de implementar la frontera abierta que sea válida para cualquier tipo de aplicación. Se utilizará, por tanto, para cada caso específico un tipo de frontera. Estas condiciones de frontera pueden ser:

Fórmulas de extrapolación: Donde el valor de una variable f en el tiempo $t+1$ en un nodo b perteneciente a la frontera se obtiene a través de uno o varios valores ya conocidos de esta variable, que pueden ser del dominio o de la propia frontera. Se puede expresar como

$$f_b^{t+1} = F(f_b^t, f_b^{t-1}, f_{b-1}^{t+1}, f_{b-1}^t, \dots) \quad (5.20)$$

Las condiciones de Dirichlet y Neumann no son más que casos concretos de las fórmulas de extrapolación, obteniéndose los valores de la frontera a partir de la de la variable dependiente en el primer caso o de su derivada en el segundo.

Condición de radiación: El valor de la propiedad es obtenido en la frontera a partir de la distribución de esta propiedad en el dominio y su velocidad de propagación. La expresión original de esta condición fue aplicada por Sommerfeld a la ecuación de Helmholtz. Así, la aplicación de esta condición a un problema unidimensional lleva a la conocida ecuación de Sommerfeld

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (5.21)$$

que es exacta para ondas planas con incidencia ortogonal y donde C es la velocidad de la fase de la onda. Cuando esta incidencia no es ortogonal se puede generalizar la fórmula anterior a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C_x \frac{\partial f}{\partial x} + C_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (5.22)$$

siendo C_x y C_y las proyecciones del vector velocidad de fase. La principal dificultad de este método es precisamente el cálculo de esta velocidad. Normalmente se usa la velocidad de fase de la vecindad del dominio proxima a la frontera (Orlanski, 1976), extrapolando su valor a ésta, o una velocidad de fase consistente en el paso espacial de la malla dividido por el paso temporal usado (Camerlengo & O'Brien, 1980). Para la simulación de una onda forzada en vez de una onda libre, se modificará la condición de Sommerfeld para tener en cuenta este forzamiento (Blumberg & Kantha, 1984; Santos & Neves, 1991).

Condición de tipo esponja: Consiste en extender el dominio de estudio con un área adicional que posea altos índices de disipación con la intención de amortiguar las perturbaciones que se dirigen al exterior e impedir que se reflejen en la frontera (Israeli & Orszag, 1981). Normalmente se utiliza combinada con otro tipo de fronteras tipo Dirichlet o Neumann. Sus dos desventajas principales son la necesidad de aumentar el dominio de estudio y por tanto el tiempo de cálculo y el hecho de que el amortiguamiento es experimentado por cualquier tipo de onda y no sólo de aquellas que se dirigen al exterior del dominio.

Condición basada en el método de las características: Se basa en la integración de las ecuaciones características y no de las ecuaciones primitivas. Pruebas de este método con modelos lineales bidimensionales muestran el buen comportamiento de este tipo de solución (Røed & Cooper, 1987), pero es de difícil aplicación a ecuaciones tridimensionales.

Condición extrapolada de un modelo general o condición tipo submodelo: Aunque no es en realidad un nuevo tipo de condición de frontera, se incluye aquí por tener características específicas que la diferencian de la condición de extrapolación. Consiste en la utilización de un modelo de malla más gruesa y área más grande donde este incluido el dominio de interés. Las condiciones de frontera son extrapoladas de los resultados del modelo en el dominio grande. Existen dos tipos de submodelos: unidireccionales o pasivos, donde la información sólo fluye del domino grande al pequeño, y bidireccionales o activos, donde la información fluye en los dos sentidos

(Haltiner & Williams, 1980; Spall & Holand, 1990; Oey & Chen, 1992; Kowalik & Murty, 1993). En la figura 5.2 se muestra como podría ser una malla del submodelo acoplada a la del modelo. En este caso es una malla con una relación 1:3.

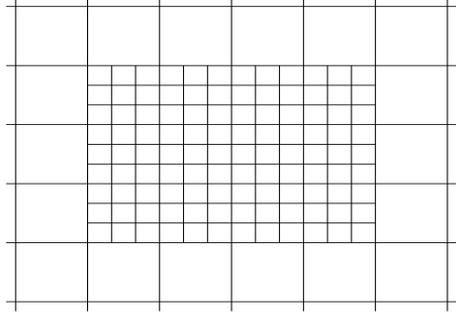


Figura 5.2: Malla de submodelo.

A continuación se explicarán las condiciones de frontera abierta implementadas en el modelo.

5.7.1 Condición de Dirichlet

La condición de Dirichlet consiste en la imposición de la variable a calcular en la frontera, sin tener en consideración la velocidad de propagación de la variable. Se puede expresar de forma general esta condición como

$$f(b, t) = f(t) \quad (5.23)$$

donde $f(t)$ es un valor impuesto el cual puede ser constante o variable en el tiempo y a lo largo de la frontera.

La condición de Dirichlet posee un elevado coeficiente de reflexión, por lo que sólo se aconseja su utilización cuando la frontera está lo suficientemente alejada de la zona del dominio que se quiere estudiar, el rozamiento con el fondo es grande y la duración de la simulación es pequeña. La simplicidad de la condición de Dirichlet hace, sin embargo, que sea muy utilizada en ciertas situaciones donde una variable es conocida en la frontera. Este es el caso, por ejemplo, del forzamiento del modelo por causa de la marea. Normalmente es conocida la elevación de la marea en la frontera a lo largo del tiempo a partir de los datos experimentales. Estos datos recogen tanto las ondas incidentes como las reflejadas en el interior del dominio por lo que el valor que se impone en la frontera es exacto.

Suponiendo una frontera Oeste ($j=1$)

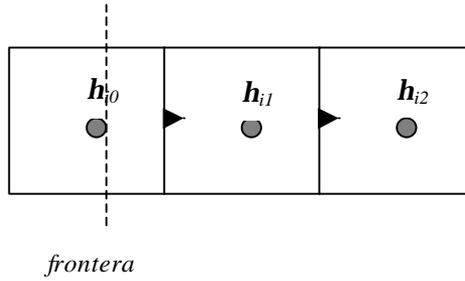


Figura 5.3: Frontera Oeste. Círculos, puntos de cálculo de la elevación; Triángulos, puntos de cálculo de la componente Oeste-Este de la velocidad horizontal.

el valor de la elevación en el nodo $i0$ es conocido e impuesto $h_b(t)$. Los coeficientes de la ecuación

$$Ah_{i0}^{t+1/2} + Bh_{i1}^{t+1/2} + Ch_{i2}^{t+1/2} = D \quad (5.24)$$

son

$$A = 0 \quad (5.25)$$

$$B = 1 \quad (5.26)$$

$$C = 0 \quad (5.27)$$

$$D = h_b \quad (5.28)$$

siendo similar para el siguiente semipaso.

Otras veces, el valor conocido no se corresponde a la elevación de la marea sino al caudal que atraviesa esa frontera. Este es el caso de la simulación de aportes fluviales al dominio, donde el dato de entrada es el propio caudal. Se supone un caudal Q_r , que entra en una célula ij por la cara Este, como se muestra en la figura siguiente

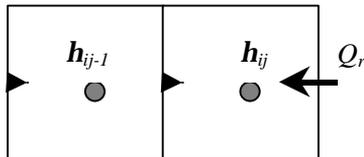


Figura 5.4: Frontera Fluvial en el Este. El caudal Q_r es impuesto en un punto de cálculo de la componente de la velocidad horizontal.

El cálculo de la elevación de esta célula se corresponde a una tridiagonal

$$A\mathbf{h}_{ij-1}^{t+1/2} + B\mathbf{h}_{ij}^{t+1/2} + C\mathbf{h}_{ij+1}^{t+1/2} = D \quad (5.29)$$

con coeficientes

$$A = -\frac{dt^2 \cdot g}{4 \cdot \mathbf{r}_0 \cdot DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \left(\mathbf{r}_{ij-1/2}^t(\mathbf{h}) \cdot \left\{ (F_{u_{ij}} - 1) DZE_{ij1} + HT_{u_{ij}}^t \right\} \right) \quad (5.30)$$

$$B = 1 + \frac{dt^2 \cdot g}{4 \cdot \mathbf{r}_0 \cdot DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \left(\mathbf{r}_{ij-1/2}^t(\mathbf{h}) \cdot \left\{ (F_{u_{ij}} - 1) DZE_{ij1} + HT_{u_{ij}}^t \right\} \right) \quad (5.31)$$

$$C = 0 \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} D = & \mathbf{h}_{ij}^t + \frac{dt}{4 \cdot DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}} \left[\left\langle \left(1 + F_{u_{ij}} \right) U_{ij1}^t \cdot AU_{ij1}^t + 2 \cdot \sum_{k=2}^{kmax} \left(U_{ijk}^t \cdot AU_{ijk}^t \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \left\{ F_{u_{ij}} \cdot X_{ij1} \frac{AU_{ij1}^t}{V_{u_{ij1}}^t} + \sum_{k=2}^{kmax} \left(X_{ijk} \frac{AU_{ijk}^t}{V_{u_{ijk}}^t} \right) \right\} + \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \left\{ \left(p_{atm_{ij-1}}^{t+1/2} - p_{atm_{ij}}^{t+1/2} \right) \right\} \right. \\ & \left. \left\{ (F_{u_{ij}} - 1) DZE_{ij1} + HT_{u_{ij}}^t \right\} \cdot \frac{DYY_{ij}}{DZX_{ij-1}} + (DZX_{ij-1} \cdot DYY_{ij}) \cdot \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \cdot \left\{ \mathbf{t}_{u_{ij}}^{\text{vento}} \cdot \frac{AU_{ijkmax}^t}{V_{u_{ijkmax}}^t} + \right. \right. \\ & \left. \left. \left(F_{u_{ij}} \frac{AU_{ij1}^t}{V_{u_{ij1}}^t} - \frac{AU_{ij2}^t}{V_{u_{ij2}}^t} \right) \cdot \left(\mathbf{r}_0 A_{V_{ij-1/2}} \frac{U_{ij2}^t - U_{ij1}^t}{DUZ_{ij1}} \right) \right\} \right] - \\ & \left\langle \sum_{k=1}^{kmax} \left(U_{ij+1k}^t \cdot AU_{ij+1k}^t \right) + Q_r^{t+1} \right\rangle + \\ & \left\langle \sum_{k=1}^{kmax} \left(V_{ijk}^{t+1/2} \cdot AV_{ijk}^t + V_{ijk}^{t-1/2} \cdot AV_{ijk}^t \right) \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{kmax} \left(V_{i+1jk}^{t+1/2} \cdot AV_{ijk}^t + V_{i+1jk}^{t-1/2} \cdot AV_{ijk}^t \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (5.33)$$

El segundo semipaso se halla de forma similar, así como cuando la discretización sigue el esquema de 6 ecuaciones.

5.7.2 Condición de Neumann

La condición de Neumann consiste en la imposición en la frontera del valor de la derivada espacial de la variable dependiente. Como la condición de Dirichlet,

no tiene en cuenta la velocidad de propagación de la perturbación. Se puede expresar esta condición como

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial n} = f(t) \quad (5.34)$$

siendo $\partial/\partial n$ la derivada espacial en la dirección normal a la frontera. La función $f(t)$ se suele escoger igual a 0, que es lo mismo que imponer el flujo nulo de la variable a través de la frontera. Esta condición posee un coeficiente de reflexión menor que el de la condición de Dirichlet, pero aun así debe ser utilizado en fronteras lo suficientemente alejadas del dominio y en periodos de simulación pequeños. Si se considera como variable la elevación de la superficie libre, la implementación de esta condición nos da lugar a los siguientes coeficientes de la ecuación (5.29)

$$A = 0 \quad (5.35)$$

$$B = 1 \quad (5.36)$$

$$C = -1 \quad (5.37)$$

$$D = 0 \quad (5.38)$$

5.7.3 Condición de radiación

En el modelo se ha implementado una condición de radiación forzada (Santos & Neves, 1991) con la que se pretendía

1. Dejar salir las perturbaciones generadas en el dominio tal como lo debe hacer una frontera artificial abierta.
2. Imponer valores conocidos de la elevación en la frontera.
3. Permitir simular los caudales reales que atraviesan la frontera artificial cuando se tiene en cuenta la acción forzadora del viento.

Por tanto la condición implementada va a ser una condición de radiación con ondas forzadas que además va a estar preparada para asumir una incidencia no ortogonal de las ondas con la frontera. Supongamos la ecuación de Sommerfeld tanto para el caudal Q a través de la frontera como para la elevación h , y también la ecuación de continuidad. Se deduce de ambas la ecuación

$$Q = Ch + q_w \quad (5.39)$$

con C la velocidad de fase de la onda y del flujo en aguas poco profundas

$$C = \sqrt{gH} \quad (5.40)$$

y donde q_w es el caudal arrastrado por el viento. Si descomponemos este caudal en una onda de amplitud h_e que entra por la frontera con un ángulo q_e y una onda h_s que sale con un ángulo q_s entonces se obtienen las siguientes componentes de la ecuación (5.39)

$$\begin{aligned} Q_x &= Ch_e \cos q_e + Ch_s \cos q_s + q_{w_x} \\ Q_y &= Ch_e \sin q_e + Ch_s \sin q_s + q_{w_y} \end{aligned} \quad (5.41)$$

El ángulo de salida se obtiene dividiendo estas dos componentes

$$q_s = \arctan \left(\frac{Q_y - Ch_e \sin q_e - q_{w_y}}{Q_x - Ch_e \cos q_e - q_{w_x}} \right) \quad (5.42)$$

Supóngase una frontera Oeste ($j=1$)

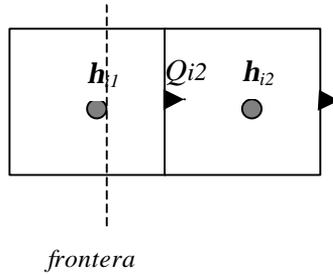


Figura 5.5: Frontera Oeste. Círculos, puntos de cálculo de la elevación; Triángulos, puntos de cálculo de la componente Oeste-Este de la velocidad horizontal.

La elevación en la frontera es

$$h_{Q_{i2}}^{t+1/2} = h_e^{t+1/2} + h_s^{t+1/2} \quad (5.43)$$

$$h_{Q_{i2}}^{t+1/2} = \frac{h_{i1}^{t+1/2} + h_{i2}^{t+1/2}}{2} \quad (5.44)$$

y considerando la ecuación (5.41) para el esquema de 4 ecuaciones S21

$$\frac{Q_{x_{i2}}^{t+1} + Q_{x_{i2}}^t}{2} = Ch_e^{t+1/2} \cos q_e + Ch_s^{t+1/2} \cos q_s^t + (q_{w_x})_{i2}^{t+1/2} \quad (5.45)$$

se obtiene

$$\mathbf{h}_{i1}^{t+1/2} = \frac{Q_{x_{i2}}^{t+1} + Q_{x_{i2}}^t}{C \cos \mathbf{q}_s^t} - 2\mathbf{h}_e^{t+1/2} \left(\frac{\cos \mathbf{q}_e}{\cos \mathbf{q}_s^t} - 1 \right) - \mathbf{h}_{i2}^{t+1/2} - \frac{2(q_{w_x})_{i2}^{t+1/2}}{C \cos \mathbf{q}_s^t} \quad (5.46)$$

Si se tiene en cuenta que

$$Q_{x_{i2}}^{t+1} = \frac{\sum_{k=1}^{kmax} (U_{ijk}^{t+1} \cdot AU_{ijk}^t)}{DYY_{ij}} \quad (5.47)$$

y sustituyendo la ecuación (4.6) en vez de

$$\sum_{k=1}^{kmax} (U_{ijk}^{t+1} \cdot AU_{ijk}^t)$$

en el caudal y éste en la ecuación anterior se llega a un sistema tridiagonal:

$$A\mathbf{h}_{i0}^{t+1/2} + B\mathbf{h}_{i1}^{t+1/2} + C\mathbf{h}_{i2}^{t+1/2} = D \quad (5.48)$$

con

$$A = 0 \quad (5.49)$$

$$B = 1 - \frac{1}{C \cos \mathbf{q}_s^t} \frac{HT_{u_{i2}}^t}{DZX_{i1}} \mathbf{g}\mathbf{r}^t(\mathbf{h}) \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \quad (5.50)$$

$$C = 1 + \frac{1}{C \cos \mathbf{q}_s^t} \frac{HT_{u_{i2}}^t}{DZX_{i1}} \mathbf{g}\mathbf{r}^t(\mathbf{h}) \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \quad (5.51)$$

$$D = \frac{Q_{x_{i2}}^t}{C \cos \mathbf{q}_s^t} + 2 \left(1 - \frac{\cos \mathbf{q}_e}{\cos \mathbf{q}_s^t} \right) \mathbf{h}_e^{t+1/2} - \frac{2(q_{w_x})_{i2}^{t+1/2}}{C \cos \mathbf{q}_s^t} + \frac{1}{C \cos \mathbf{q}_s^t} \cdot \left\langle \frac{1}{DYY_{i2}} \left[\sum_{k=2}^{kmax} (U_{i2k}^t \cdot AU_{i2k}^t) + F_{u_{i2}} \left(U_{i21}^t + \frac{dt \cdot X_{i21}}{\mathbf{r}_0 \cdot V_{u_{i21}}^t} \right) \right] AU_{i21}^t + \right. \quad (5.52)$$

$$\left. \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \sum_{k=2}^{kmax} \left(X_{i2k} \frac{AU_{i2k}^t}{V_{u_{i2k}}^t} \right) \right] + \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \left(p_{atm_{i1}}^{t+1/2} - p_{atm_{i2}}^{t+1/2} \right) \frac{HT_{u_{i2}}^t}{DZX_{i1}} + DZX_{i1} \frac{dt}{\mathbf{r}_0} \cdot$$

$$\left\{ \mathbf{t}_{wind}^{u_{i2}} \cdot \frac{AU_{i2kmax}^t}{V_{u_{i2kmax}}^t} + \left(F_{u_{i2}} \frac{AU_{i21}^t}{V_{u_{i21}}^t} - \frac{AU_{i22}^t}{V_{u_{i22}}^t} \right) \cdot \left(\mathbf{r}_0 A_{V_{i3/2}1} \frac{U_{i22}^t - U_{i21}^t}{DUZ_{i21}} \right) \right\}$$

Se va a suponer en la aplicación de la condición de la radiación que el flujo es una superposición lineal entre la onda de la marea y el viento. Como ya se dijo anteriormente, la onda de marea impuesta procedente de los datos experimentales suele poseer la contribución de la onda incidente y de la onda reflejada, por lo que la condición de radiación se necesita solamente para tener en cuenta el forzamiento del viento. El término extra q_w de la ecuación (5.45) es cero si el viento sólo sopla dentro del dominio y no nulo si el viento también sopla fuera de éste. El cálculo de este término puede hallarse de dos formas: i) despreciando en la ecuación del momento todos los términos a excepción del tensor del viento y del fondo; ii) usando la ecuación (5.45) para los puntos interiores adyacentes a la frontera. Se va a utilizar este último método por ser el que proporciona mejores resultados (Santos & Neves, 1991).

Para verificar la eficiencia de la condición de radiación se han realizado algunas pruebas para dinámicas forzadas por la marea y el viento.

Onda sinusoidal en un canal abierto en los dos extremos: Se impone en un extremo una onda sinusoidal de semiamplitud 1 m. La onda debe atravesar el dominio saliendo por el extremo opuesto sin experimentar ninguna reflexión. Un cambio en la amplitud y la fase indicarían la existencia de una onda reflejada moviéndose en sentido contrario. Los parámetros utilizados en esta prueba son:

Paso espacial horizontal: $\Delta x = \Delta y = 100$ m, paso espacial vertical con la superficie en equilibrio: $\Delta z = 25$ m, profundidad del canal con la superficie en equilibrio: $h = 100$ m, paso temporal: $\Delta t = 1$ s, tiempo de simulación: $T = 640$ s, longitud del canal: $l = 5100$ m, anchura del canal: $b = 300$ m, parámetro de Coriolis: $f = 0$ s⁻¹, viscosidad turbulenta horizontal y vertical: $A_H = A_V = 0$ m²s⁻¹, coeficiente adimensional de rozamiento del fondo: $c_{dw} = 0$.

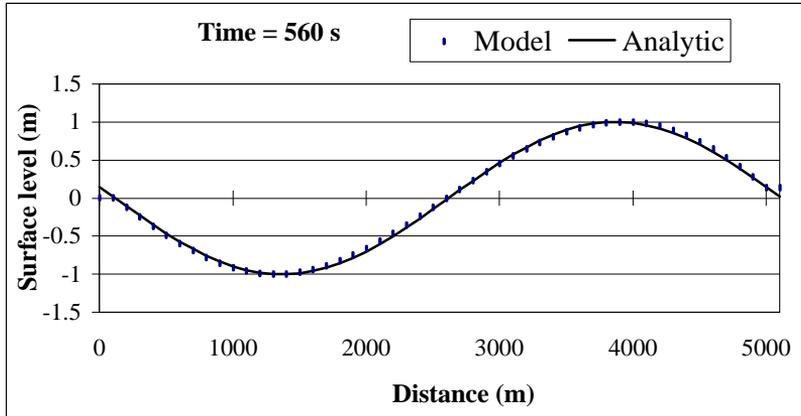


Figura 5.6: Comparación de la superficie libre de la onda modelada (puntos) con la onda analíticamente resuelta (Trazo continuo) después de 560 s de simulación.

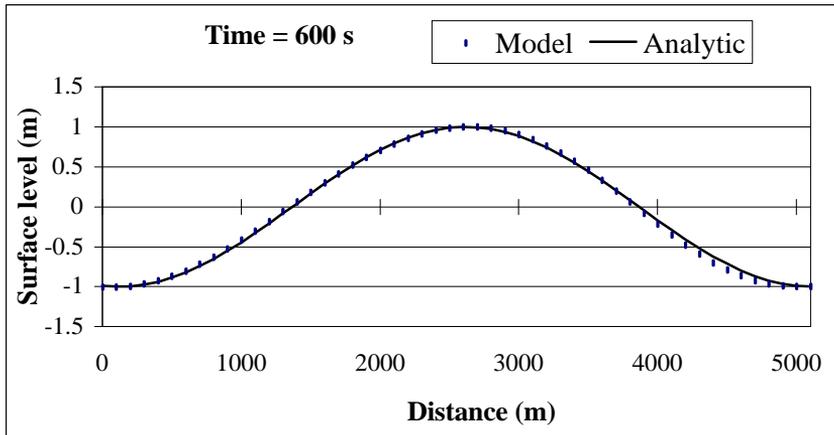


Figura 5.7: Igual que la figura anterior pero después de 600 s de simulación.

La onda se impone en la frontera Oeste. En las figuras 5.6 y 5.7 se pueden observar la comparación de la onda modelada con la solución analítica del problema.

Resonancia de una onda en un canal cerrado por un extremo: Esta prueba es equivalente a la anterior salvo que el canal está ahora cerrado en un extremo. Si la longitud del canal es de la misma longitud que la de la onda, ésta resonará en el extremo dando lugar a una onda estacionaria de semiamplitud el

doble de la onda impuesta. Los parámetros utilizados en esta simulación son los mismos que en el caso anterior.

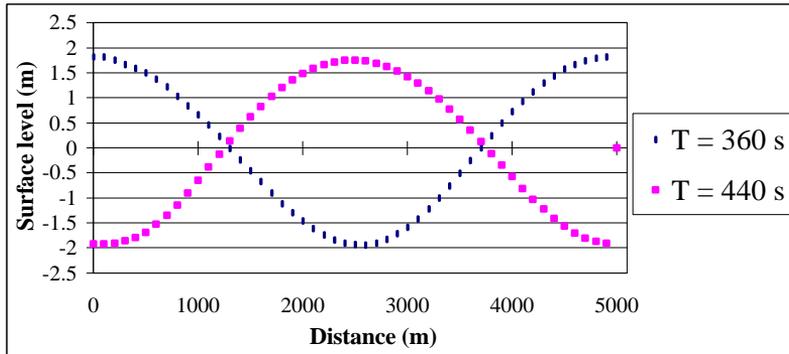


Figura 5.8: Onda estacionaria en el canal a dos tiempos diferentes.

En la figura 5.8 se puede comprobar la resultante de dos ondas moviéndose en sentido opuesto. Esta resultante es una onda estacionaria con el doble de la semiamplitud. Esta prueba muestra la aplicabilidad de la condición de radiación en una frontera que además está siendo forzada por una onda impuesta.

Onda saliendo de un canal a un dominio abierto: En la siguiente simulación se experimenta con el comportamiento de una onda que sale de un canal a un dominio no confinado. La prueba se realiza en dos dominios diferentes, de forma que uno sea una porción del otro, tal como se muestra en la figura 5.9. Si la onda sale sin reflejarse en la frontera, el resultado de los dos dominios debe ser idéntico.

Los parámetros utilizados en esta prueba son: $\Delta x = \Delta y = 100$ m, $\Delta z = 25$ m, $h = 100$ m, $\Delta t = 1$ s, $T = 600$ s, $f = 0$ s⁻¹, $A_H = A_V = 0$ m²s⁻¹, $c_{dw} = 0$, longitud de onda = 5000 m, semiamplitud = 1 m.

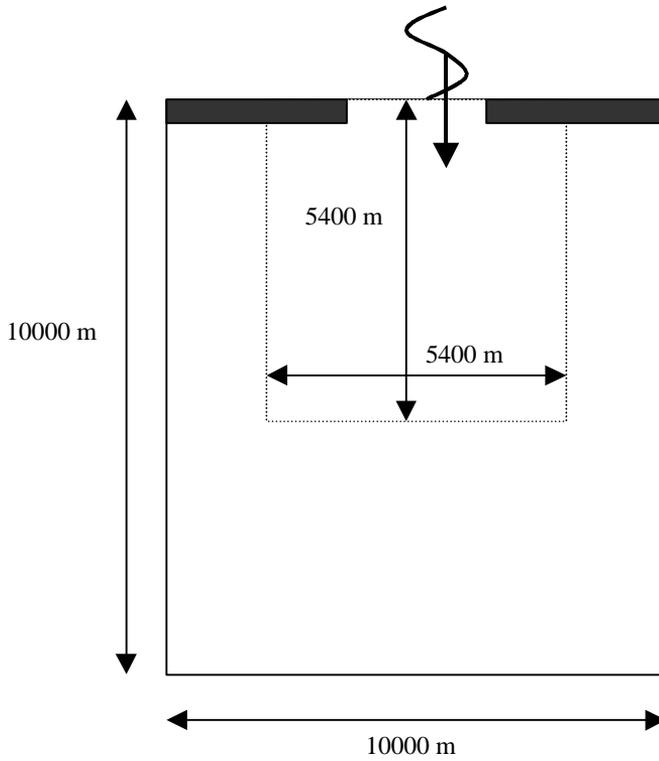


Figura 5.9: Mallas utilizadas para la prueba 3.

Se muestra una simulación en el dominio más grande y el campo de velocidades en la superficie en la figura 5.10.

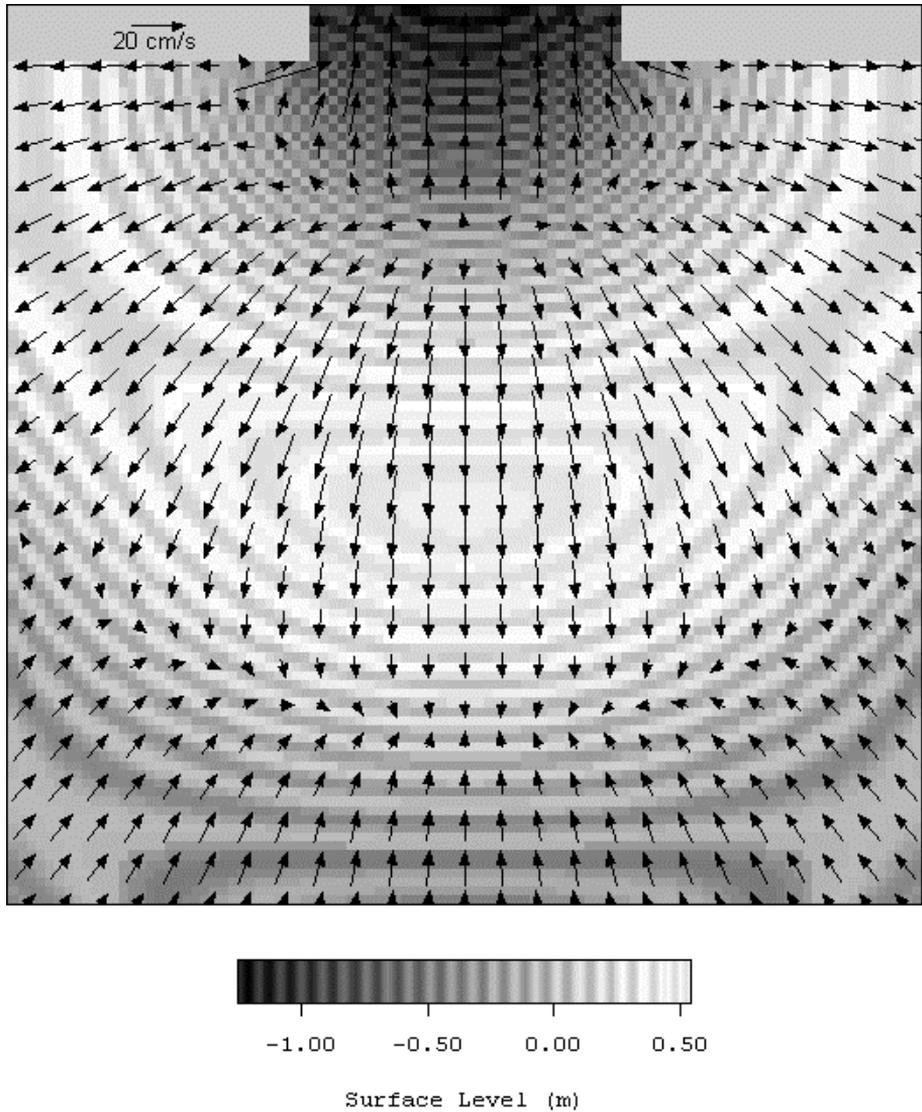


Figura 5.10: Elevación de la superficie y velocidad superficial (Tiempo=520 s).

En las figuras 5.11 y 5.12 se pueden observar la comparación entre la elevación de la superficie promediada a todo el área común de los dos dominios, así como el módulo medio de dicho área. Se puede observar una gran concordancia entre las dos simulaciones, obteniéndose simplemente una menor amplitud y velocidad en el área menor. La frontera influye en el sistema como si hubiese una mayor difusión numérica.

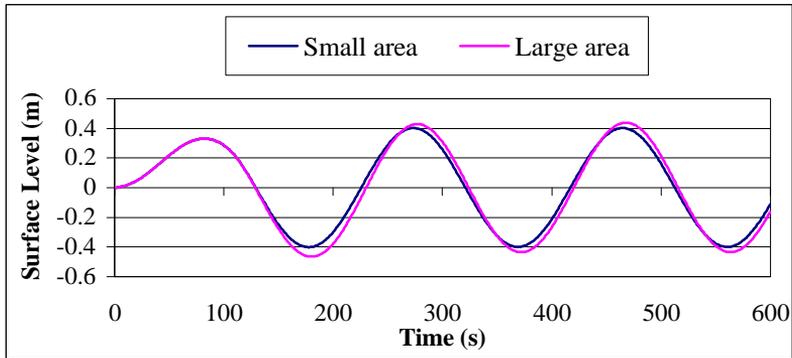


Figura 5.11: Comparación entre la elevación media del área común entre la simulación en el dominio grande y pequeño.

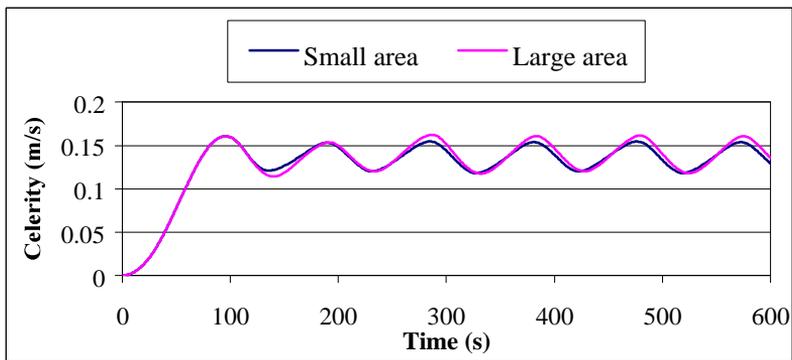


Figura 5.12: Comparación entre el módulo medio de la velocidad del área común entre la simulación en el dominio grande y pequeño.

Esta prueba ha servido también para estimar la sensibilidad de la introducción del cálculo del ángulo de salida en un caso extremo. Se ha comprobado que este refinamiento aumenta de forma apreciable la inestabilidad del sistema, sobre todo cuando los flujos en la frontera se invierten, es decir, cuando el agua pasa de entrar a salir del dominio. Para evitar esto, se impone una condición mixta que consiste en que para ciertos ángulos de entrada muy pequeños, éstos dejan de ser calculados y son impuestos. Dicho ángulo crítico se puede escoger como parámetro del sistema a estudiar. En particular, para esta prueba, las figuras mostradas corresponden a simulaciones en las que el ángulo de salida no es calculado. Simulaciones con este cálculo mostraron una sensibilidad muy restrictiva al ángulo sin una mejora apreciable de los resultados. En la figura 5.13 se muestra la comparación de las líneas de igual

superficie entre las dos simulaciones. Se nota claramente una pequeña deformación de éstas en el dominio menor debido a la influencia de la frontera. Aún así, el resultado muestra una gran concordancia entre las dos simulaciones.

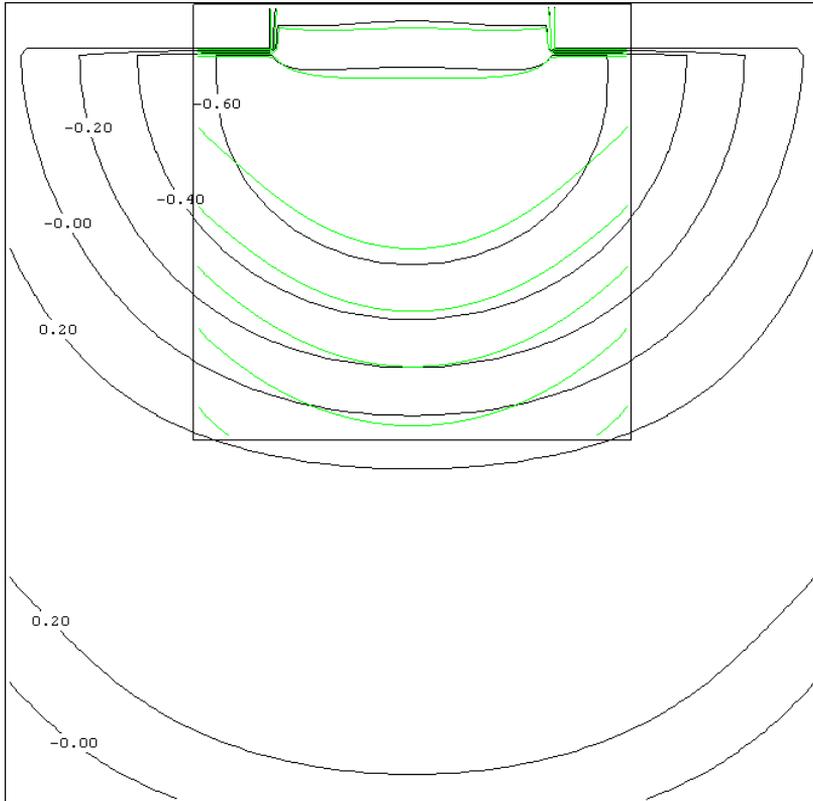


Figura 5.13: Elevación de la superficie en el dominio grande (líneas negras) y en el pequeño (líneas verdes), Tiempo = 560 s.

Canal abierto en los dos extremos forzado por viento: En la siguiente prueba se supone un canal, abierto en los dos extremos, al cual se le impone un viento en la superficie de 10 ms^{-1} . Debido a que el nivel inicial es 0 y todas las células del sistema están forzadas por el mismo tensor de esfuerzo, la solución con la condición de radiación debe ser la misma que sin condición de radiación. Los parámetros utilizados en esta simulación son: $\Delta x = \Delta y = 10000 \text{ m}$, $\Delta z = 20 \text{ m}$, $h = 120 \text{ m}$, $l = 200 \text{ km}$, $b = 30 \text{ km}$, $\Delta t = 300 \text{ s}$, $T = 13 \text{ h}$, $f = 0 \text{ s}^{-1}$, $A_H = 1000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $A_V = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $c_{dw} = 2.1 \cdot 10^{-3}$, Coeficiente de arrastre superficial: $c_{da} = 1.14 \cdot 10^{-3}$, Velocidad del viento: $V_w = 10 \text{ ms}^{-1}$.

En la figura 5.14 se puede observar la velocidad superficial. Se comprueba que al cabo de 13 horas el módulo continúa siendo prácticamente el mismo en todas las células, como era de esperar. La superficie libre también se mantiene constante. El máximo error absoluto al cabo de 13 horas es del orden de 10^{-3} m en la elevación de la superficie libre y de 10^{-4} ms^{-1} en la velocidad.

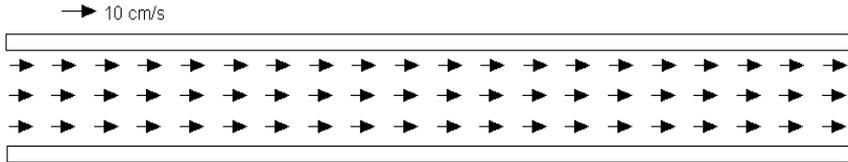


Figura 5.14: Velocidad superficial en un canal abierto. Tiempo: 13 h.

Dominio abierto forzado por un viento constante: Esta prueba es similar a la anterior pero el dominio posee ahora las cuatros fronteras abiertas con condición de radiación, y es forzado con un viento de 10 ms^{-1} con un ángulo de 45° respecto al dominio. Igual que en la prueba anterior, al ser uniformemente forzado, la solución con condición de radiación debe ser idéntica a la solución sin radiación, es decir, no debe mostrar cambios en la superficie libre y la velocidad debe ser constante. Los parámetros usados en esta simulación son: $\Delta x = \Delta y = 10000 \text{ m}$, $\Delta z = 20 \text{ m}$, $h = 120 \text{ m}$, $l = b = 200 \text{ km}$, $\Delta t = 300 \text{ s}$, $T = 13 \text{ h}$, $f = 0 \text{ s}^{-1}$, $A_H = 1000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $A_V = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $c_{dw} = 1.4 \cdot 10^{-3}$, Coeficiente de arrastre superficial: $c_{da} = 1.14 \cdot 10^{-3}$, Velocidad del viento: $V_w = 10 \text{ ms}^{-1}$, Dirección del viento = 45° .

En la figura 5.15 se muestra la velocidad superficial en el dominio al cabo de 13 horas. La máxima desviación de la superficie libre respecto del plano era solamente de $75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. La solución numérica de esta prueba así como la de la anterior muestran una gran concordancia con la solución analítica.

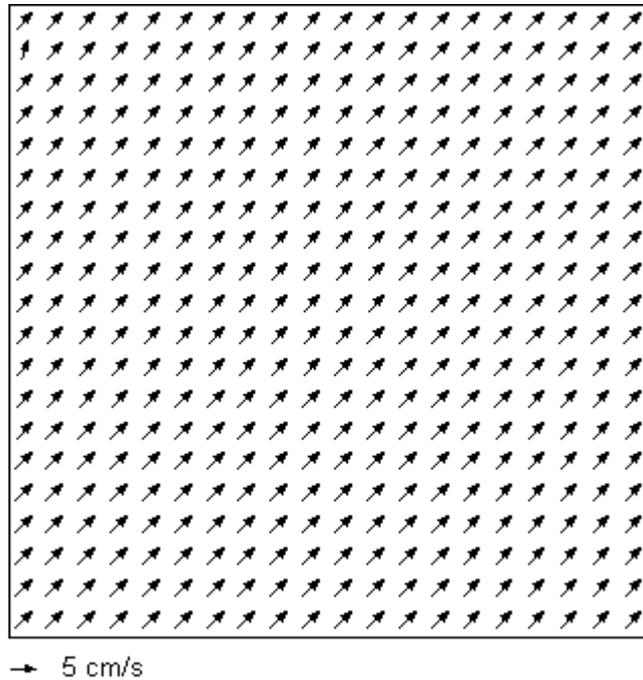


Figura 5.15: Velocidad superficial en un dominio abierto. Tiempo: 13 h.

5.7.4 Mallas acopladas: Submodelo

Un recurso para la imposición de las condiciones de contorno es la utilización de mallas acopladas. De este modo, se simulará con una malla de paso espacial muy grande una región lo suficientemente amplia para que las fronteras abiertas estén muy alejadas del área de interés. Esta área de interés se simulará con una malla de paso espacial menor que el de la malla gruesa, y por tanto con mayor precisión. Esta malla más fina se acopla a la malla gruesa y toma las condiciones de contorno para sus fronteras abiertas de esta última.

El problema surge de la imposición de las condiciones de frontera en la interfase entre las dos mallas. Se han propuesto dos soluciones, una interfase unidireccional, donde la información sólo pasaría del modelo grande al pequeño y una interfase bidireccional donde la información atravesaría la frontera tanto hacia un lado como hacia el otro. En un principio se podría desear que la información circulase en las dos direcciones. Sin embargo, esto conlleva dos problemas de difícil solución. Por un lado, ondas de longitud pequeña que estén bien representadas en la discretización espacial de la malla fina puede que no lo

estén en la malla gruesa, lo cual es un problema cuando estas ondas atraviesan la interfase hacia esta malla. Por otro lado, el paso de unas ondas de un tipo de malla a otra, da lugar a una reflexión y refracción numérica, análogas a las que sufren las ondas electromagnéticas al pasar de un medio a otro (Pielke, 1984). En la aplicación siguiente, y teniendo en cuenta la diferencia de tamaño entre las dos áreas, se ha optado por un acoplamiento unidireccional debido a su sencillez y fácil implementación. Además, se supone que la circulación del modelo grande no es afectada por los resultados del submodelo.

La implementación del submodelo unidireccional se realiza del siguiente modo:

- a) Se efectúa la simulación con el modelo de malla gruesa. Este modelo almacena cada cierto tiempo los valores de las células que se solapan con las fronteras del submodelo.
- b) Se realiza una simulación con la malla fina. Las condiciones de frontera se obtienen de la interpolación bilineal en el espacio y lineal en el tiempo de los valores procedentes del modelo de malla gruesa, grabados anteriormente. Algunos autores sugieren otro tipo de interpolaciones (Kowalik & Murty, 1993). En el modelo, la forma de implementar la interpolación se ha realizado de tal manera que puede ser fácilmente sustituida por otra. Esta interpolación se realiza con los valores de la temperatura, salinidad y altura de la superficie, dejando sin especificar el momento, tal como si fuera una condición de Dirichlet. Así, debe de quedar especificada la onda de gravedad en la frontera. Este método es más recomendable que especificar el movimiento quasi-geostrófico (Elvius & Sundström, 1973). Sin embargo, a la hora de hallar los términos advectivos y difusivos de las componentes de la velocidad se usan también valores interpolados del momento, pues se ha comprobado que mejora los resultados esperados.

Se muestra a continuación una serie de ejemplos en los que se ha probado la eficacia de las condiciones de frontera.

Onda de marea en una bahía rectangular: En este ejemplo se ha comparado los resultados del modelo y del submodelo para una bahía rectangular de profundidad constante de 50 m. La malla de prueba es de 30x30 y se usa un paso espacial de 1000 m. El modelo es forzado con una onda de marea M_2 en la frontera abierta. El área del submodelo, que consiste en un cuadrado de 10x10 nodos, se sitúa en el centro de la bahía (figura 5.16) y posee el mismo paso espacial que el modelo, con la intención de comprobar la distorsión de la

onda en este. Tanto el modelo como el submodelo poseen una sola capa. El resto de parámetros también se toman comunes a las dos simulaciones, siendo estos los siguientes: $T=158400$ s, $\Delta t = 60$ s, $f = 0$ s⁻¹, $A_H = 500$ m²s⁻¹, $c_{dw} = 2.1 \cdot 10^{-3}$, semiamplitud $a = 1$ m.

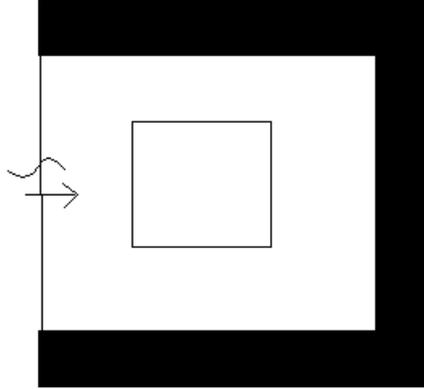


Figura 5.16: Área del modelo y submodelo (cuadrado central). La flecha indica la frontera abierta.

En las figuras 5.17 y 5.18 se muestra la comparación de la elevación de la superficie y del módulo obtenidos con el modelo y con el submodelo en el punto central del área de cálculo.

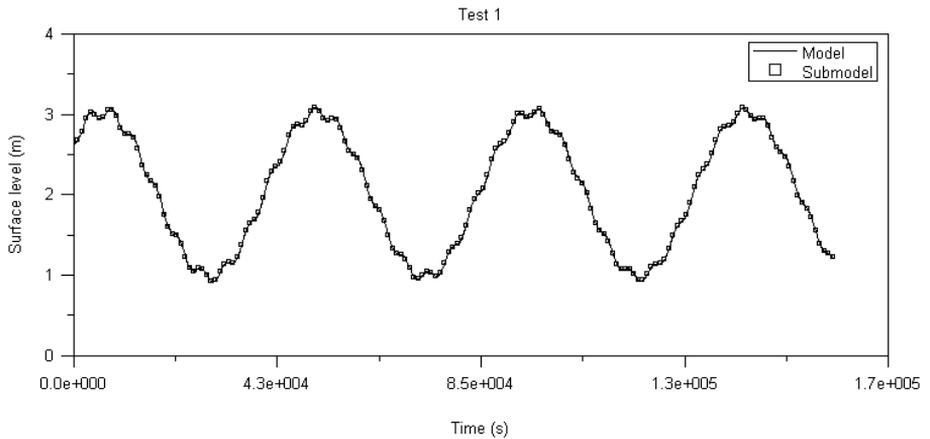


Figura 5.17: Comparación de la elevación de la superficie para el punto central del área de cálculo obtenidos con el modelo y con el submodelo.

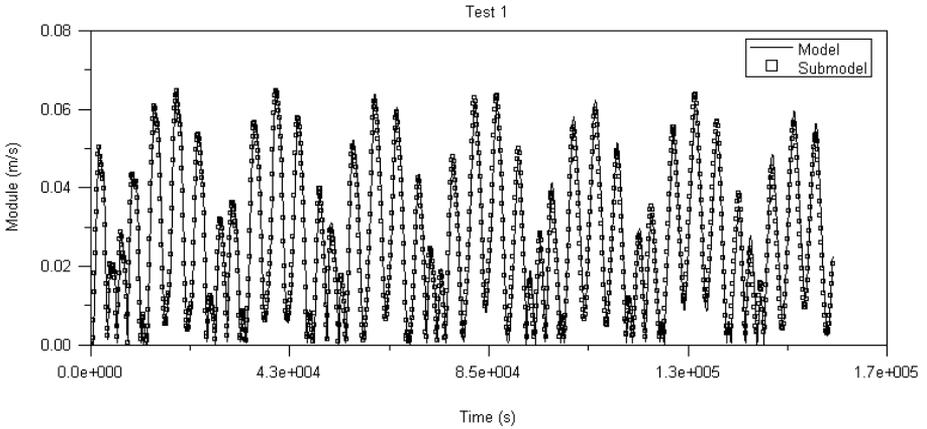


Figura 5.18: Comparación del módulo de la velocidad para el punto central del área de cálculo obtenidos con el modelo y con el submodelo.

En las figuras 5.19 y 5.20 se muestra el error absoluto de los resultados del submodelo en el punto central respecto al resultado del modelo para las dos magnitudes consideradas.

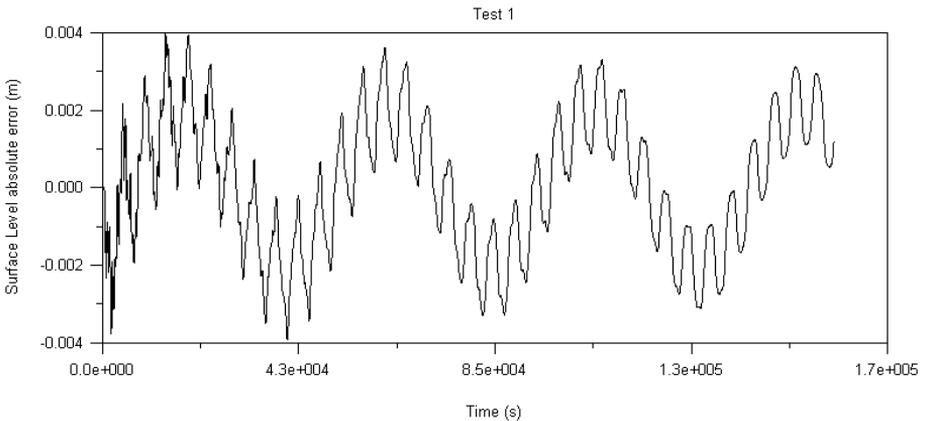


Figura 5.19: Error absoluto de la elevación de la superficie para el punto central del área de cálculo obtenidos con el modelo y con el submodelo.

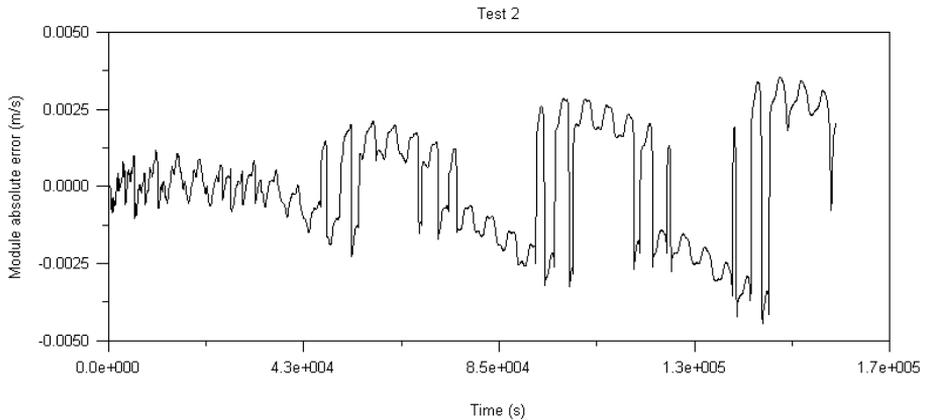


Figura 5.2: Error absoluto del módulo de la velocidad para el punto central del área de cálculo obtenidos con el modelo y con el submodelo.

Se puede observar que el error en la elevación es pequeño así como el del módulo. Sin embargo, en otras pruebas diferentes a ésta, este último ha demostrado depender de la frontera abierta del submodelo, siendo pequeño cuando las fronteras abiertas son sólo dos y no están unidas.

Onda de marea en una bahía con obstáculo y malla fina: En la siguiente prueba se ha querido simular una situación en la que la simetría no es tan alta como en el caso anterior. Además, para este caso, la malla utilizada en el submodelo va a ser más fina que en el modelo grande, tal y como se pretende hacer para los casos reales. La bahía posee un obstáculo en el medio. El tamaño de la malla grande es de 60×60 nodos con un paso espacial de 3000 m mientras que en el caso de la malla del submodelo, se ha utilizado un tamaño de 86×86 y un paso espacial de 1000 m. La situación de las mallas es como se muestra en la figura 5.21 y la profundidad es constante e igual 50 m. El paso temporal se ha tomado de 60 s. El resto de los parámetros han sido tomados como en la prueba anterior. En las figuras 5.22 y 5.23 se muestran las elevaciones y las velocidades para el modelo y el submodelo. Se comprueba una gran concordancia entre las dos figuras. La separación de la capa límite en la esquina se produce a la misma distancia entre los dos modelos. Se muestra también una serie temporal de la elevación y de la velocidad en las figuras (5.24), (5.25) y (5.26).

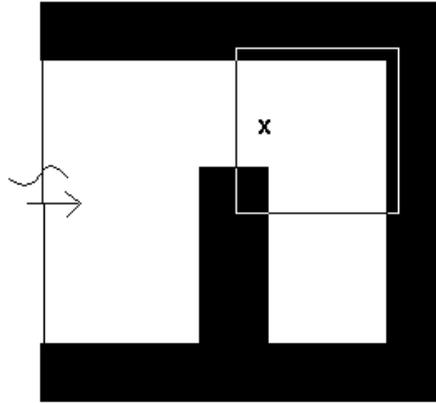


Figura 5.21: Malla del modelo y del submodelo (cuadrado). La X indica el punto donde se hicieron las comparaciones de la serie temporal

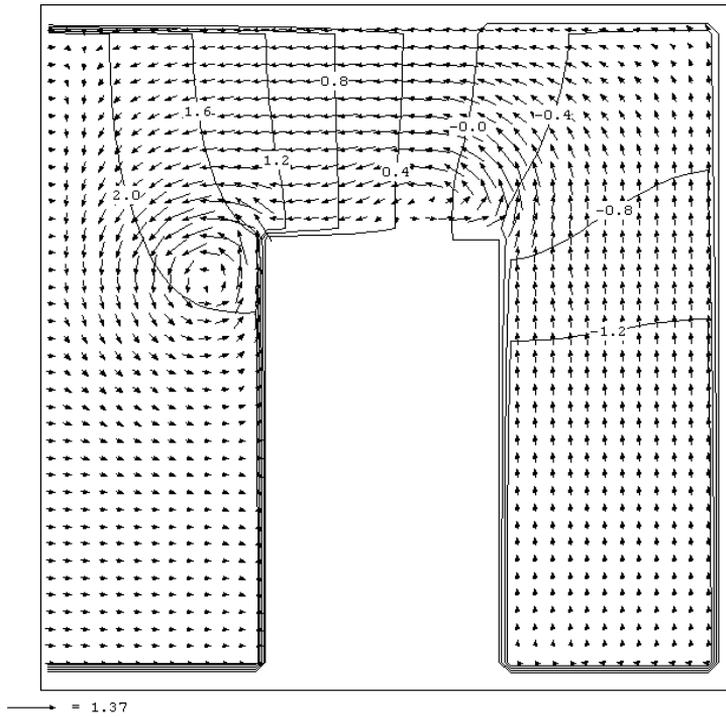


Figura 5.22: Velocidad (m s^{-1}) y elevación (isolíneas en m) en la malla del modelo tras 12 horas de simulación

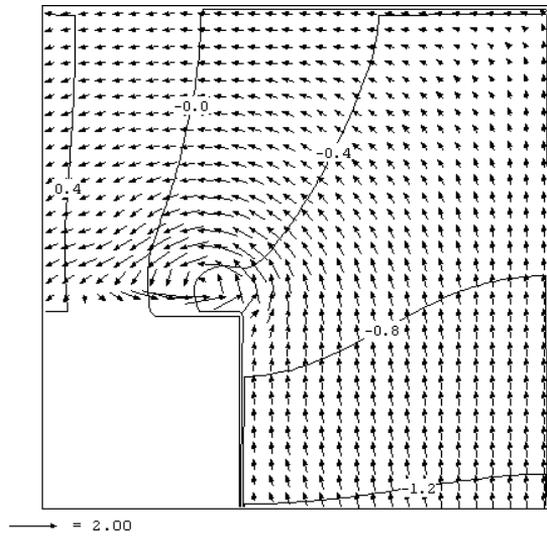


Figura 5.23: Velocidad (m s^{-1}) y elevación (isolíneas en m) en la malla del submodelo tras 12 horas de simulación.

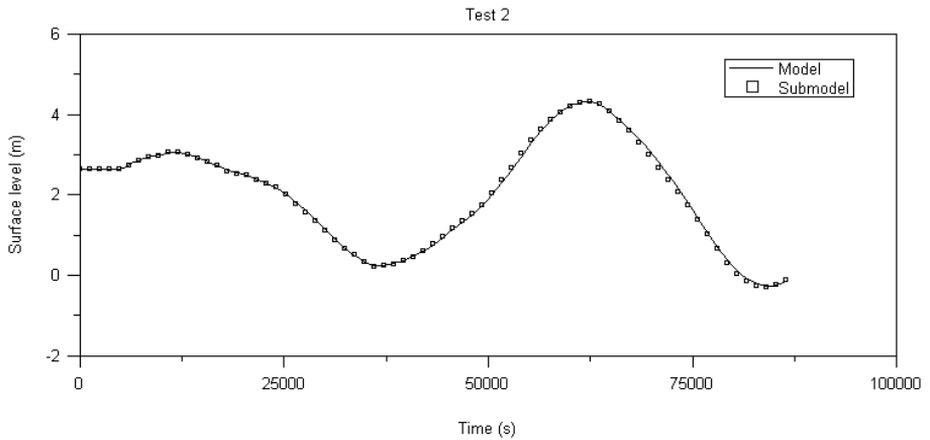


Figura 5.24: Comparación de la elevación de la superficie libre en el punto indicado en la figura 5.21.

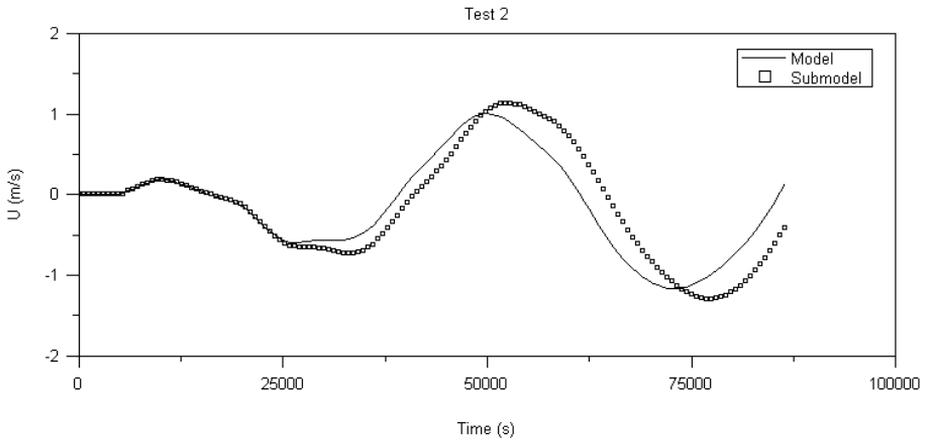


Figura 5.25: Comparación de la componente Oeste-Este de la velocidad en el punto indicado en la figura 5.21.

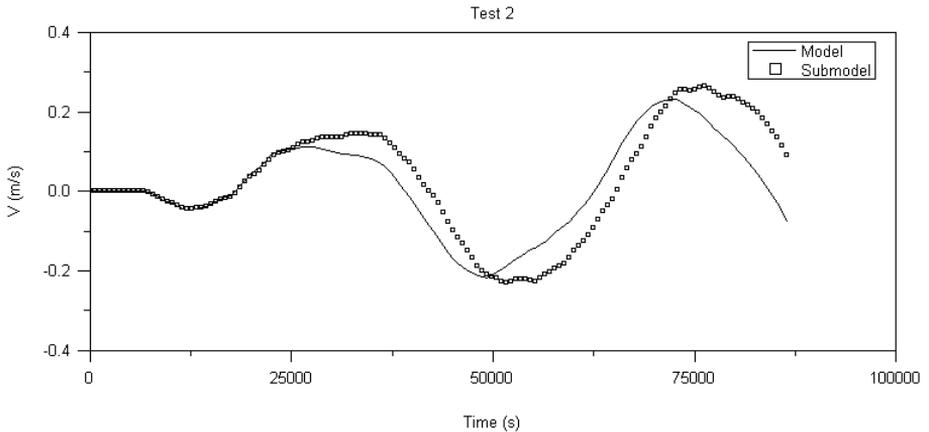


Figura 5.26: Comparación de la componente Sur-Norte de la velocidad en el punto indicado en la figura 5.21.

Se comprueba que las velocidades ya no concuerdan tanto entre el modelo y el submodelo. Diversas pruebas muestran que, así como la elevación se ajusta muy bien entre los dos dominios, en el caso de la velocidad el submodelo precisa de una recalibración. Una vez realizada ésta, los resultados vuelven a ser aceptables. El motivo de ello es debido a que la condición de frontera no es más que una condición de Dirichlet impuesta a partir de los resultados del modelo. El dominio de dependencia de las ecuaciones en la frontera es violado y existe por tanto una pérdida de información (Perkins *et al.*, 1997).

5.7.5 Condición para la Temperatura y la Salinidad

Es normal pensar que el valor vecino necesario para el cálculo de estas propiedades en la frontera depende del sentido del flujo. Así, si el flujo es saliente, la propiedad en la frontera se halla a partir de valores en el interior del dominio. Si el flujo es entrante, la propiedad en la frontera viene dada por un valor que será fruto de una contribución entre valores del dominio y valores impuestos. Estos valores impuestos representan el conocimiento de la propiedad fuera del dominio a una distancia dada, llamada distancia de disolución. Se considera que a esta distancia la propiedad ya no es influenciada por lo que ocurra en el interior del dominio que se simula. El valor impuesto en la frontera es calculado a través de una interpolación lineal entre el valor más próximo del dominio y este valor impuesto en la distancia de disolución.

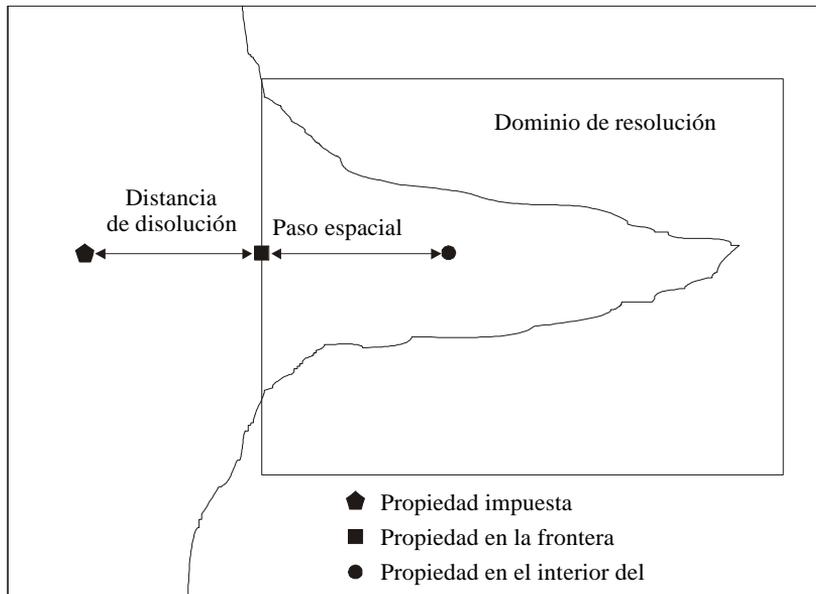


Figura 5.27: Distancia de disolución y valor de la propiedad en la frontera

Capítulo 6

6 Aplicación y Resultados

En este capítulo se muestra la aplicación de lo anteriormente expuesto para el caso concreto del estudio de la circulación en la Ría de Vigo.

6.1 Aplicación al área de estudio: La Ría de Vigo

Para la aplicación del modelo a un área determinada se debe introducir una serie de datos iniciales y de contorno particulares del área y del período que se pretende simular. Así, el primer paso para la realización de la simulación es el conocimiento de la batimetría de la región. En realidad, lo que se necesita es una matriz bidimensional con los valores de las profundidades de cada nodo. En la elección del tamaño de la matriz se debe establecer un compromiso entre la precisión deseada y la capacidad de cálculo del computador utilizado. La malla utilizada en la mayor parte de las simulaciones posee el tamaño de 72×108 nodos con un paso espacial constante de 300 m.

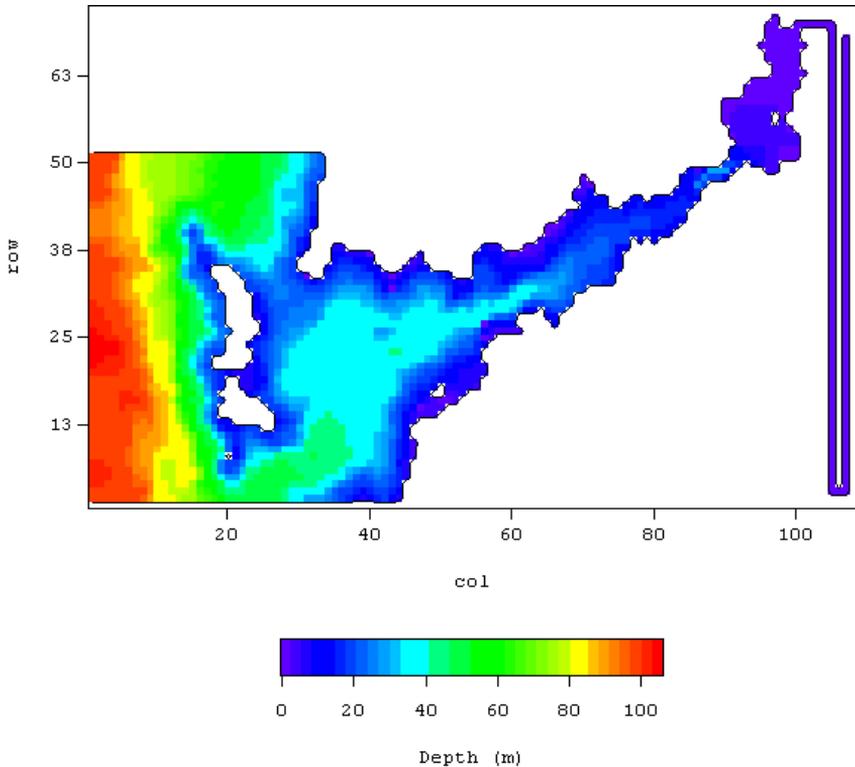


Figura 6.1: Malla utilizada para la modelización de la Ría de Vigo con la profundidad representada.

La creación de esta matriz de profundidades se ha realizado a través de la digitalización de la carta 9240 editada por el *Instituto Hidrográfico de la Marina* (I.H.M., 1989). Como se puede ver en la figura 6.1, se ha añadido un canal de una célula de ancho que simulará la zona de influencia de la marea dentro del río Verdugo-Oitabén. La frontera con el océano se ha separado del interior de la ría para evitar su influencia. Las fronteras Norte y Sur se han cerrado para simular la entrada de una onda plana procedente del Oeste.

Otro tipo de datos necesarios para la simulación son aquellas variables que van a especificar las fronteras, como puede ser la elevación de la superficie libre en la frontera abierta, el flujo de calor en la superficie libre, el caudal de los aportes fluviales o el coeficiente de rozamiento del fondo. Muchas de estas variables son imposibles de obtener para el período necesario por lo que se impone la interpolación o la asunción de ciertas aproximaciones, que dependerán de la simulación en cuestión.

6.2 Simulación de la corriente de marea.

En el siguiente apartado se mostrará la simulación de la corriente barotrópica producida por la marea. Esto quiere decir que en esta implementación no fue considerado el forzamiento producido por la distribución de densidad ni del viento. Tampoco se impone ningún aporte fluvial. Para la realización de la simulación se ha considerado densidad constante en toda el área. Debido a que el objetivo de esta simulación era la obtención de la corriente de marea y la distribución de la elevación de la marea a lo largo de la ría, la simulación se realizó teniendo en cuenta una sola capa en vertical. Por tanto, los resultados obtenidos son, en cierto modo, similares a los que se obtendrían con un modelo bidimensional.

Se ha hallado, por tanto, la elevación de la marea y la velocidad integrada en profundidad para todos los puntos de la malla durante un periodo entre el 8 de Abril de 1997 a las 0:00 Hora Local y el 14 de Abril de 1997 a las 0:00 Hora Local. El modelo ha sido forzado por la imposición de la elevación de la superficie libre en la frontera abierta. Esta elevación en la frontera es obtenida a través del análisis de las componentes armónicas de la elevación medida en el punto WRL 1657 (figura 2.7) (Datos I.E.O., 1997). Aunque este punto no se corresponde exactamente a la frontera, se ha comprobado que el desfase es mínimo, ciertamente debido a que la marea en estos puntos se corresponde a una onda incidente y una onda reflejada que provoca que la elevación en la Ría de Vigo sea prácticamente uniforme hasta el estrecho de Rande. Se ha ensayado también una distribución de la elevación variable a lo largo de la frontera abierta. Esta era obtenida por la interpolación lineal de las medidas obtenidas en los puntos WLR 1657 y WLR 1675 (figura 2.7), sin variar el resultado significativamente. Para esta simulación se ha utilizado un paso espacial de 20 s, una discretización de 6 ecuaciones, una rugosidad característica z_0 de 0.0025 m y un coeficiente de viscosidad turbulenta de $100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

En la figura 6.2 se muestra el campo de velocidades de la corriente integrada en profundidad para un momento de flujo y reflujó. En la figura 6.3 se muestra una comparación entre una serie temporal de la elevación de la marea medida en los puntos WLR 1659, 1657, 1675 (figura 2.7) y los resultados obtenidos por el modelo para los mismos puntos. Se comprueba la buena concordancia del resultado del modelo con las medidas obtenidas en los tres puntos. El error relativo máximo de la amplitud predicha es solamente del 5 %, y es mayor en los picos y en los valles.

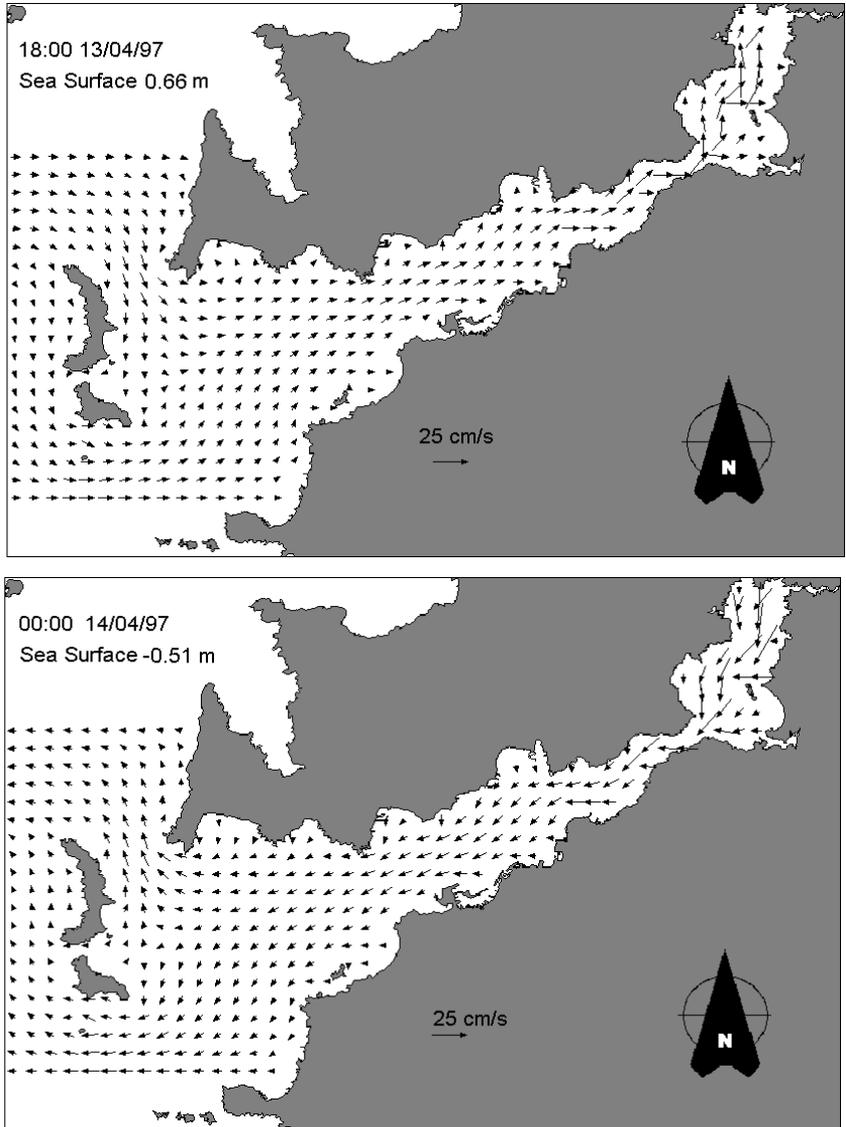


Figura 6.2: Campo de velocidades integradas en profundidad para la corriente de marea, en situación de flujo y refluj, para el momento indicado en la figura. La elevación se indica respecto al nivel medio de la marea.

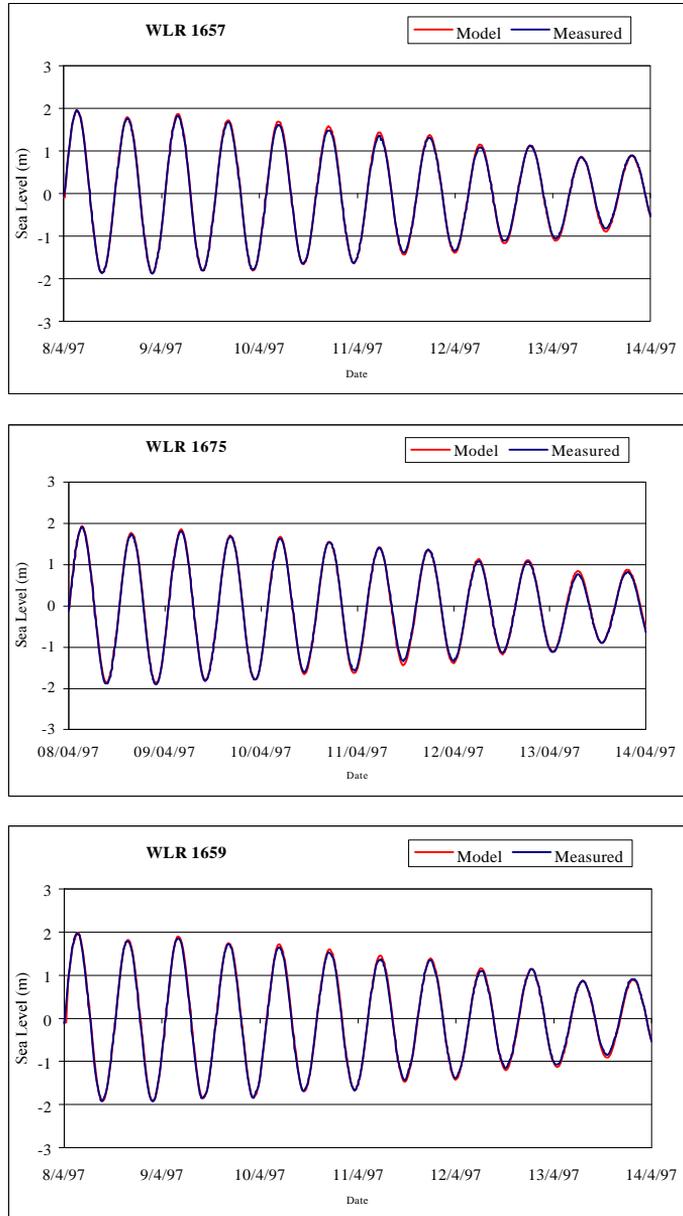


Figura 6.3: Comparación de una serie temporal de la elevación de la marea entre medidas y resultados obtenidos con el modelo en tres puntos.

Las simulaciones revelan que las velocidades mayores son alcanzadas en las zonas de la Ensenada de San Simón que se quedan descubiertas, con más de 40 cm s^{-1} . Sin embargo, estos valores no deben de llevar a pensar en un gran transporte de agua debido a la escasa y a veces nula profundidad de la zona. Por tanto, se puede decir que las mayores velocidades de la ría se encuentran en el Estrecho de Rande con valores máximos de 27 cm s^{-1} y 14 cm s^{-1} en mareas vivas y muertas respectivamente. En el tramo medio de la ría, y en concreto en el bajo de Meixide se encuentran velocidades máximas de 12 cm s^{-1} en mareas vivas y 5 cm s^{-1} en mareas muertas. En la Boca Norte se obtienen velocidades máximas en períodos de mareas vivas de 26 cm s^{-1} y 11 cm s^{-1} para mareas muertas, con valores similares para la Boca Sur. Como ya se ha dicho, estas velocidades son valores medios en profundidad lo que quiere decir, que es posible obtener velocidades mayores en ciertas partes de la columna de agua. Además, otras causas forzadoras, como puede ser el viento o el campo de densidades pueden desviar las velocidades de los resultados obtenidos anteriormente.

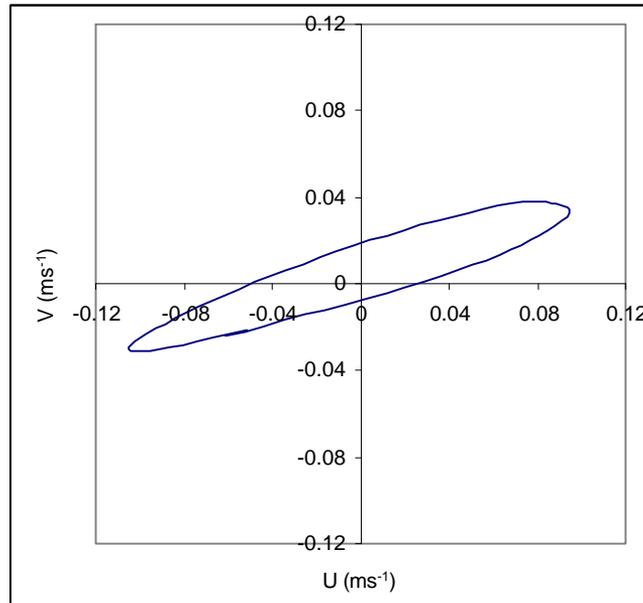


Figura 6.4: Componentes de la velocidad integrada en altura en el punto $42^{\circ}13.479^{\circ}\text{N}$, $8^{\circ}49.813^{\circ}\text{W}$ a lo largo de un período de marea obtenidas por el modelo.

En la figura (6.4) se muestran enfrentadas las componentes de la velocidad para un período de marea durante el día 9 de Abril de 1997 obtenidas con el modelo en el punto $42^{\circ}13.479'N$, $8^{\circ}49.813W$. El eje mayor de la elipse se corresponde casi perfectamente el eje de la ría. Tal y como se deducía del análisis realizado en el capítulo segundo, la velocidad de la marea muestra una simetría casi perfecta entre el flujo y el reflujos, siendo la inversión de la marea en pleamar un poco más lenta que en bajamar.

6.3 Simulación de la corriente de marea y viento

En la siguiente simulación se ha querido comprobar la capacidad del modelo para la reproducción de las diferentes velocidades en altura. Para ello, se comparan series temporales obtenidas por un correntímetro en el punto $42^{\circ}13.479'N$, $8^{\circ}49.813W$ a diferentes profundidades con los datos obtenidos del modelo. Estos datos fueron recogidos por el Instituto Español de Oceanografía durante los meses de Marzo y Abril de 1997 (Datos I.E.O., 1997). A la vista de las medidas de este correntímetro, se constata que la capa superficial posee velocidades muy superiores a las de los otros niveles y que además esta velocidad no posee un período semidiurno como correspondería a la corriente de la marea. La velocidad de la capa superficial es producida principalmente por el arrastre del viento en combinación con la marea. Se supone que esta desviación de la circulación de la marea no puede ser debida a efectos baroclínicos pues el forzamiento es contrario a la tendencia de la corriente obtenida en las medidas, además del hecho de que en el período de simulación la columna era prácticamente homogénea. Para la siguiente simulación se ha impuesto un viento variable en la superficie además de la elevación de la marea en la frontera abierta. La serie temporal del viento procede de datos experimentales obtenidos a 120 m de altura en la Isla de Ons ($42^{\circ}23.00'N$, $8^{\circ}56.20'W$) (Datos I.E.O., 1997) que, a pesar de no estar en el área a simular, se estimó válida, como muestran los resultados. El valor del viento fue multiplicado por un factor de conversión que recoge la intensificación del módulo al extrapolar datos recogidos sobre tierra al mar (Hsu, 1986; Galperin & Mellor, 1990). Este factor se ha ajustado a 1.5. En la siguiente figura se muestra el módulo y la dirección del viento que se ha impuesto en todo el dominio

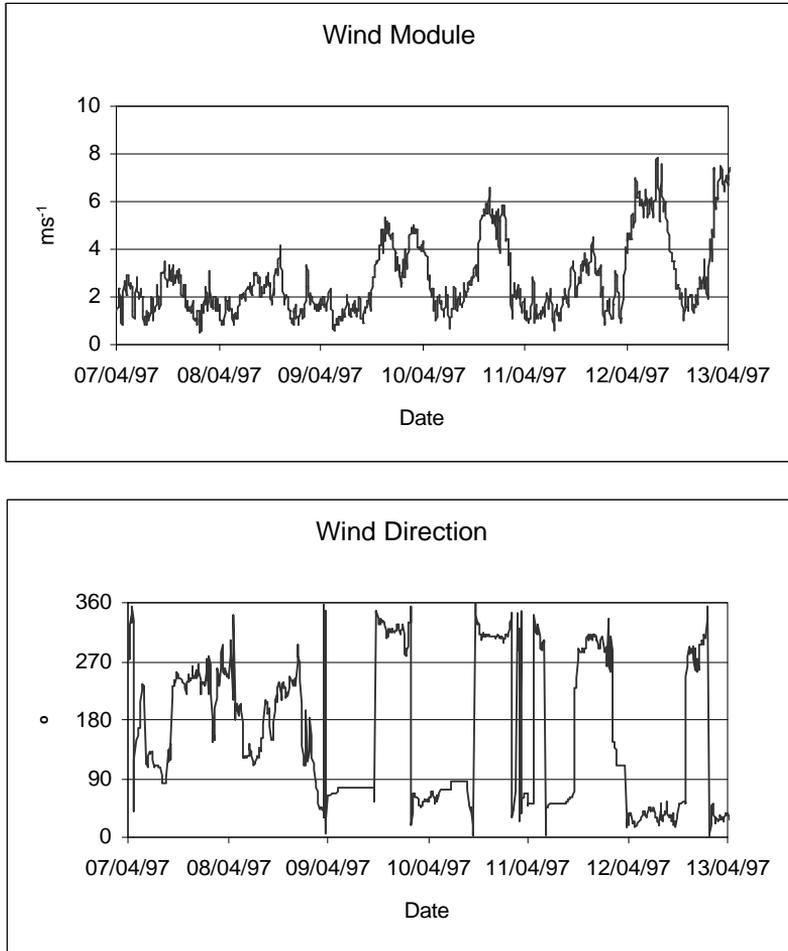


Figura 6.5: Módulo y dirección del viento impuesta en todo el dominio de simulación.

En esta simulación se ha utilizado una discretización espacial que aprovecha las máximas posibilidades de los volúmenes finitos. Se dividió la coordenada vertical en 5 dominios sigma, tal como indica la siguiente tabla. Para esta simulación se ha utilizado un paso espacial de 30 s, una discretización de 4 ecuaciones, una rugosidad característica de 0.0025 m y un coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal de $100 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. La viscosidad vertical utilizada fue adaptada a una constante a partir de la capa límite del fondo, con un valor de $0.001 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Esta parametrización fue con la que se obtuvieron los mejores resultados después de haber utilizado otras fórmulas empíricas.

Dominio	Profundidad max.-min.	Número de capas	Espesor relativo de la capa dentro del dominio
1	Máxima profundidad-80 m	1	Capa 1: 1
2	80 m - 60 m	1	Capa 2: 1
3	60 m - 40 m	1	Capa 3: 1
4	40 m - 2 m	7	Capa 4: 0.094339 Capa 5: 0.150943 Capa 6: 0.150943 Capa 7: 0.150943 Capa 8: 0.150943 Capa 9: 0.150943 Capa 10: 0.150943
5	2 m – Superficie	3	Capa 11: 0.69 Capa 12: 0.30 Capa 13: 0.01

Tabla 6.1: Discretización vertical para la simulación de la marea y el viento, contada del fondo a la superficie.

Se muestra a continuación (figura 6.6) una comparación entre las medidas y los resultados obtenidos con el modelo de las velocidades a diferentes profundidades, entre el día 7 de Abril y 13 de Abril de 1997. Las medidas del correntímetro han sido filtradas con un filtro pasa baja de una hora. Se comprueba la buena concordancia en todas las alturas. La mayor parte de los errores proceden de situaciones donde se estima que el viento impuesto, procedente de una estación meteorológica situada fuera del área de simulación, no se correspondían al que estaba actuando en ese momento en la Ría de Vigo. Este error en la imposición del momento en la superficie se transmite en desviaciones en toda la columna de agua. Otra fuente de errores procede de subestimar en algunas situaciones la viscosidad vertical y los efectos baroclínicos en la estratificación. Este tipo de errores podría verse subsanado con un modelo de turbulencia.

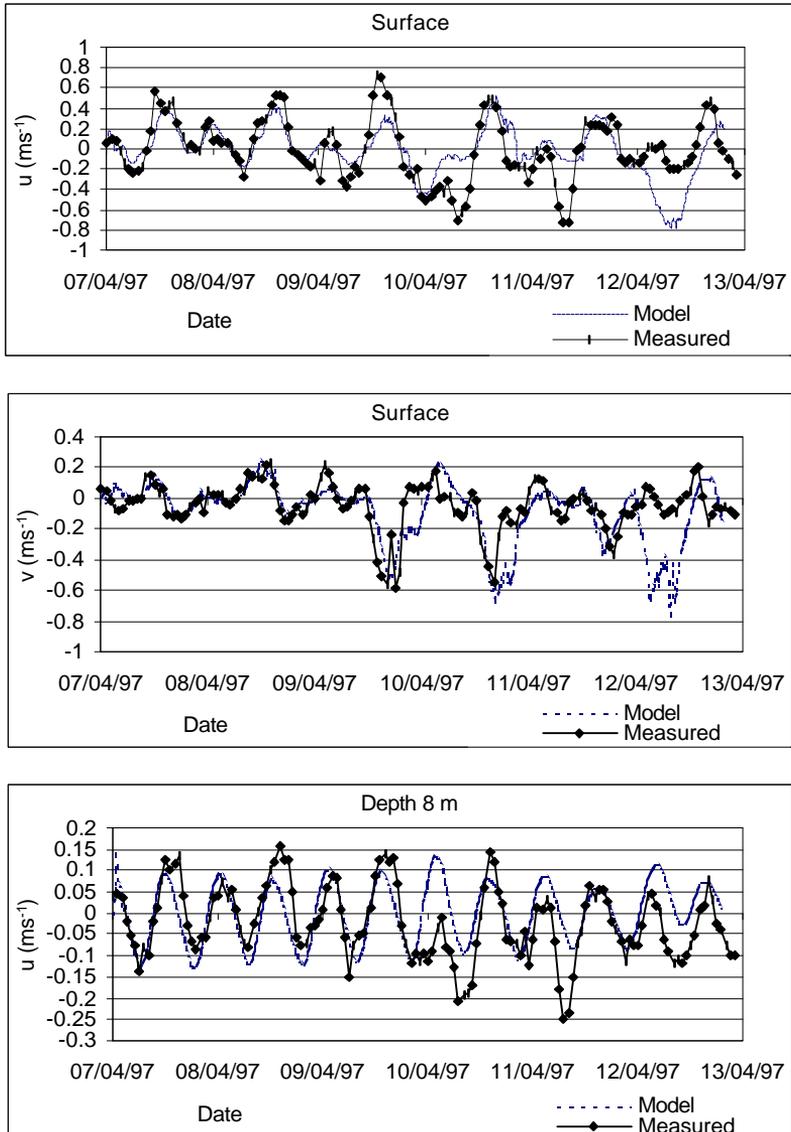


Figura 6.6.a: Comparación entre las componentes de la velocidad medida y calculada en el punto $42^{\circ}13.479'N$, $8^{\circ}49.813'W$. La profundidad es indicada en cada gráfica.

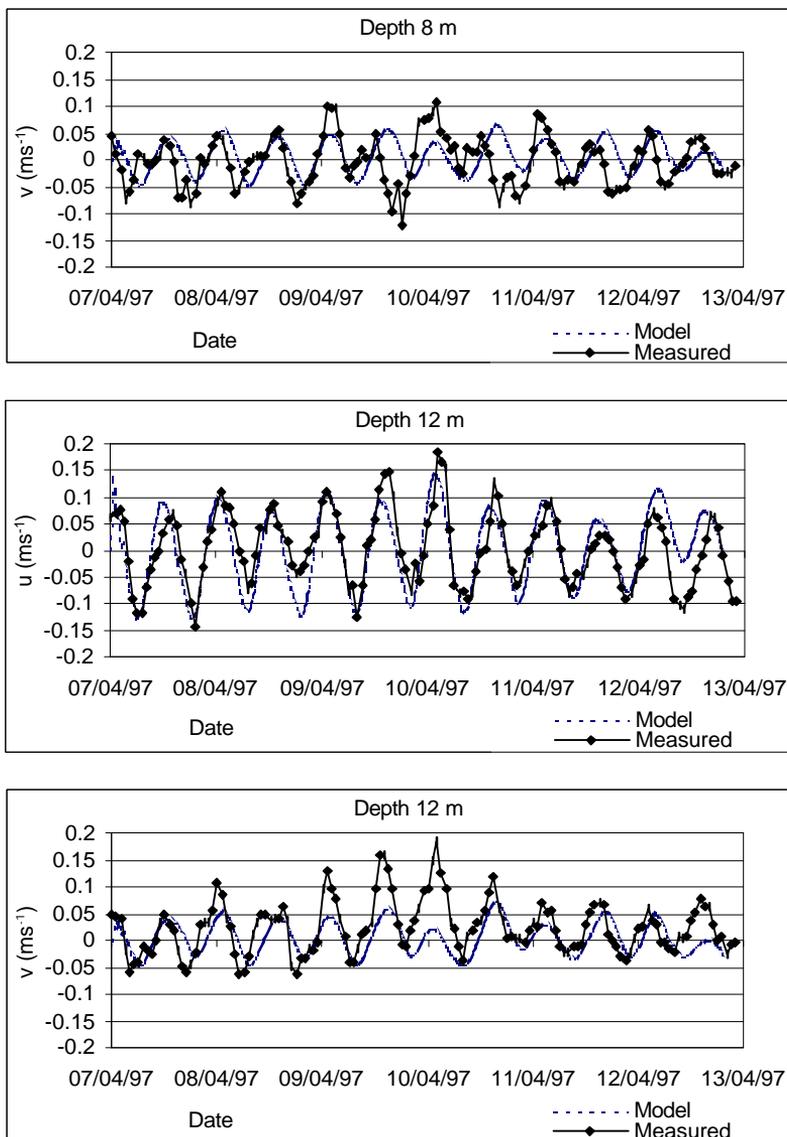


Figura 6.6.b: Comparación entre las componentes de la velocidad medida y calculada en el punto $42^{\circ}13.479'N$, $8^{\circ}49.813'W$. La profundidad es indicada en cada gráfica.

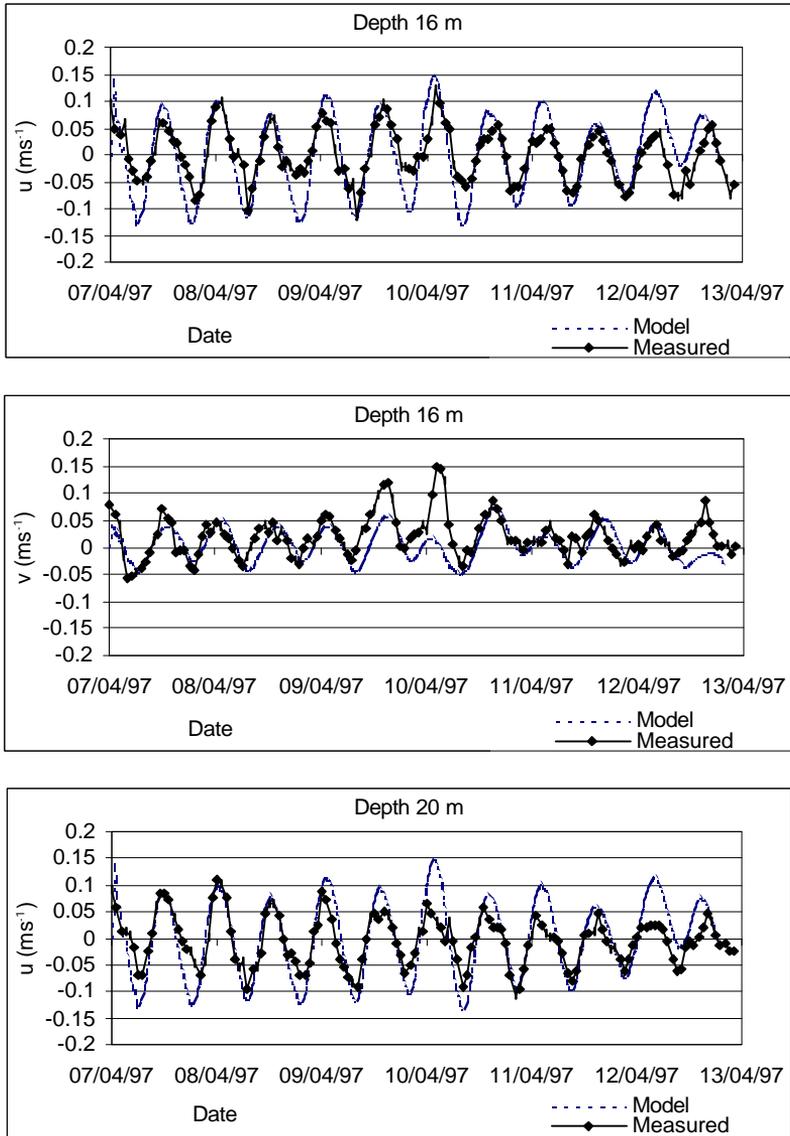


Figura 6.6.c: Comparación entre las componentes de la velocidad medida y calculada en el punto $42^{\circ}13.479'N$, $8^{\circ}49.813'W$. La profundidad es indicada en cada gráfica.

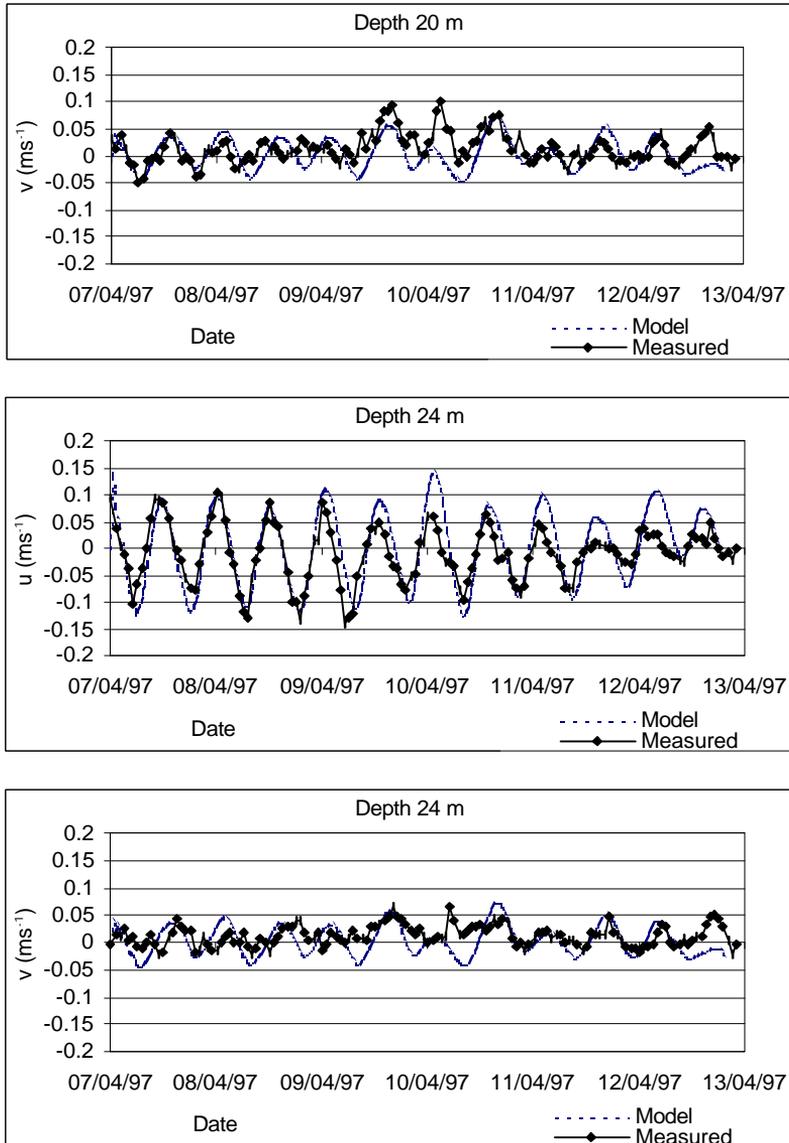


Figura 6.6.d: Comparación entre las componentes de la velocidad medida y calculada en el punto $42^{\circ}13.479'N$, $8^{\circ}49.813W$. La profundidad es indicada en cada gráfica.

En las figuras (6.7) se muestra el campo de velocidades en tres capas diferentes para la situación de refluo (6:00 horas) del día 8 de Abril de 1997. Se observa una pequeña disminución de las velocidades según las capas están más próximas al fondo. La zona sin vectores en la ensenada de San Simón viene

dada por pertenecer al dominio sigma número 4 que se extiende hasta los 2 m de profundidad solamente.

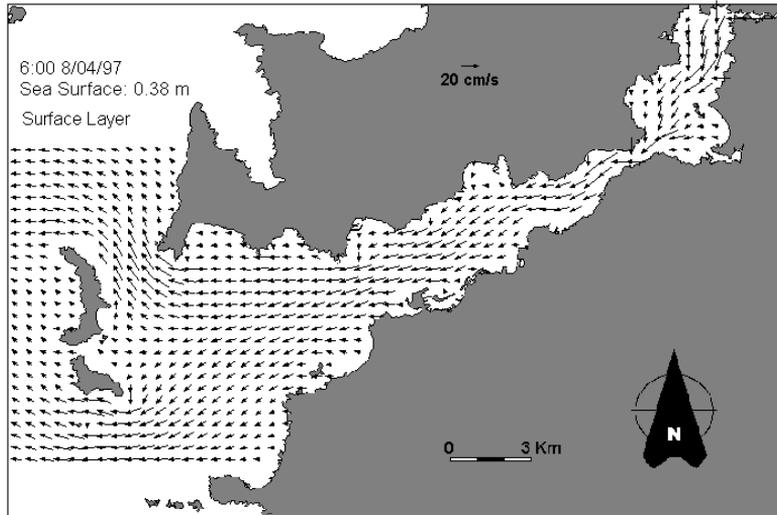


Figura 6.7.a: Campo de velocidades producidas por la marea y el viento para la capa superficial en el día 8/04/97 a las 6:00 horas simuladas por el modelo. Elevación respecto al nivel medio.

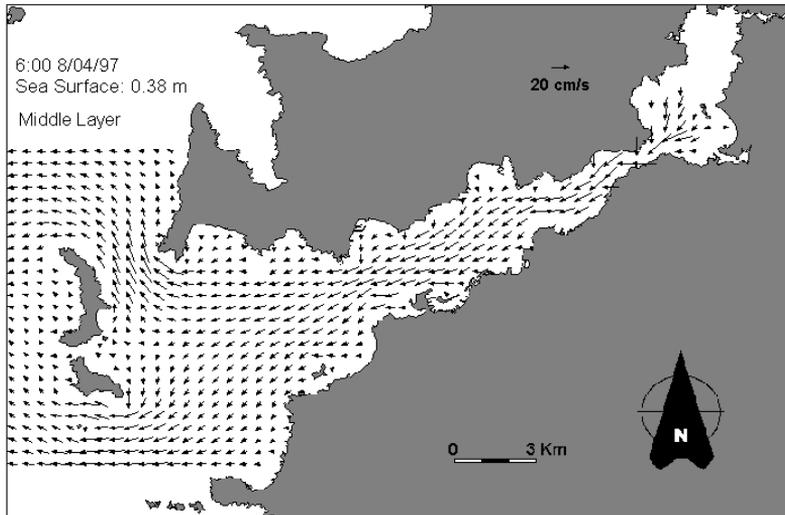


Figura 6.7.b: Campo de velocidades producidas por la marea y el viento para la capa intermedia en el día 8/04/97 a las 6:00 horas simuladas por el modelo. Elevación respecto al nivel medio.

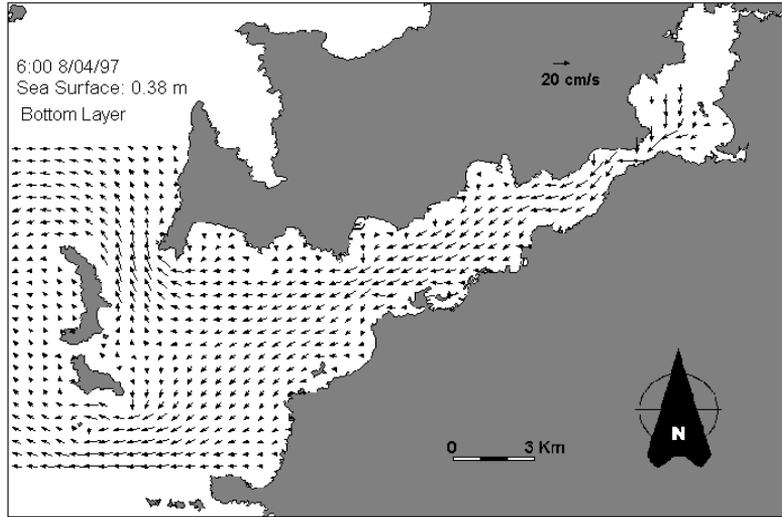


Figura 6.7.c: Campo de velocidades producidas por la marea y el viento para la fondo, en el día 8/04/97 a las 6:00 horas simuladas por el modelo. Elevación respecto al nivel medio.

Se muestra ahora el campo de velocidades en la sección vertical de la figura 6.8 para varias situaciones a lo largo del día 8 de Abril de 1997

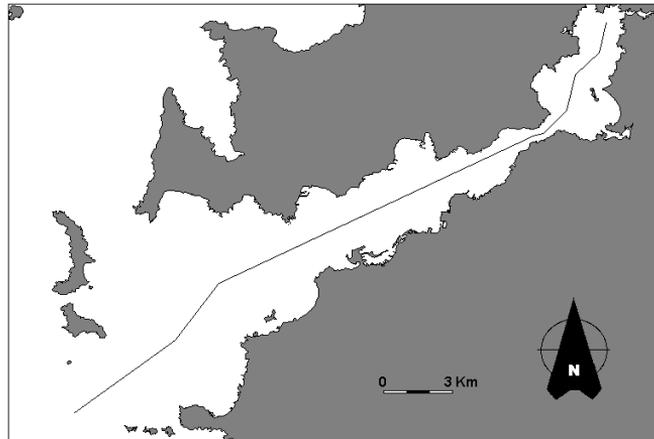


Figura 6.8: Sección vertical en la que se muestra las velocidades.

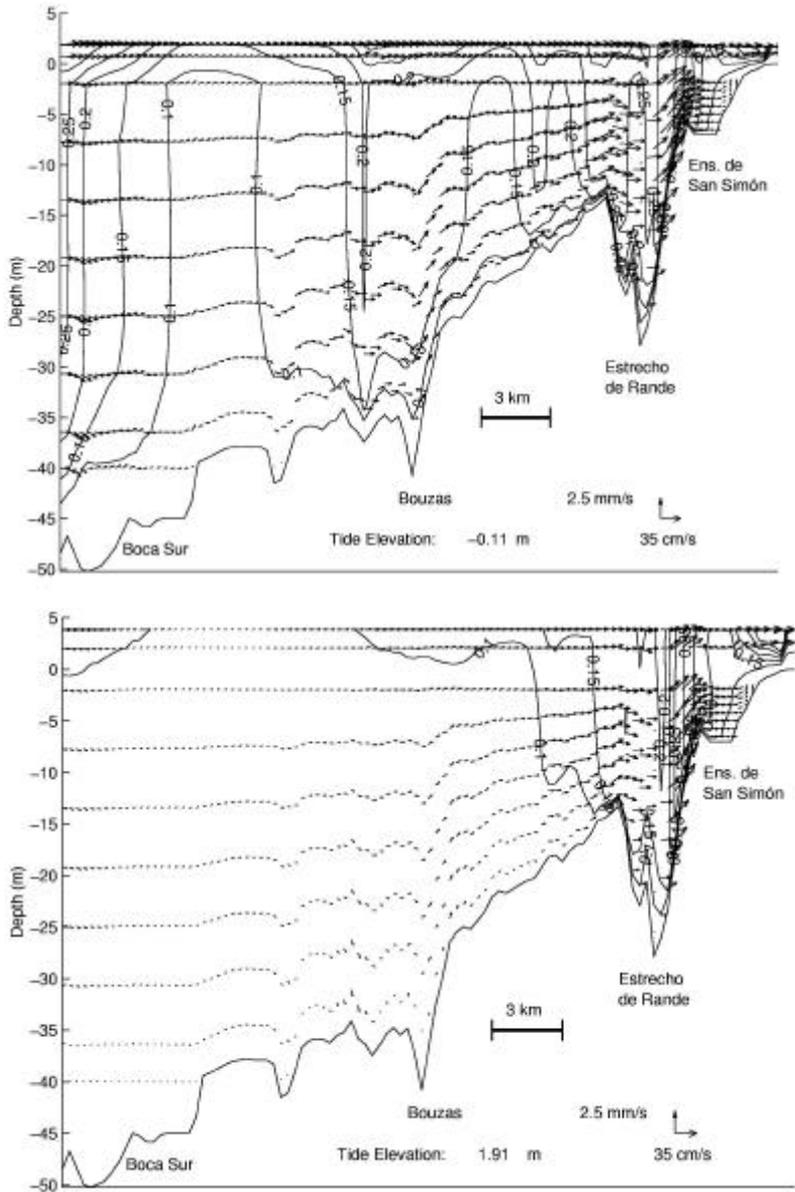


Figura 6.9.a: Campo de velocidades de la sección vertical de la figura 6.8, para las situaciones de flujo (0:00) y marea alta (3:00) del día 8/04/97. Simulación forzada por marea y viento. Las isóneas muestran el módulo de la velocidad en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Elevación respecto al nivel medio.

Se comprueba que los valores mayores se obtienen en el Estrecho de Rande, en la angostura de la parte exterior de Bouzas, y en las bocas. Los valores son parecidos a los predichos en la simulación barotrópica con una sola capa. En la marea baja, los altos valores correspondientes a la salida del río, no se corresponden con el movimiento de una gran masa de agua ya que es muy pequeña la altura de la columna en este sitio.

6.4 Simulación baroclínica

En este apartado se procede a la simulación de la corriente provocada no sólo por la marea sino también por la diferencia en los campos de densidad. La simulación reproduce una situación típica de febrero - marzo de 1986, donde los aportes fluviales van a causar una gran estratificación. El caudal del río es de $100 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, cercano a la máxima medida en el año 1986, aportando un agua dulce que se supone en equilibrio térmico con la atmósfera ($11 \text{ }^\circ\text{C}$). La salinidad y temperatura de la frontera abierta se consideraron constantes e igual a un valor de 35.5 y $13 \text{ }^\circ\text{C}$ respectivamente. Además, se impuso una distancia de disolución de 6 km. La discretización vertical es igual a la del caso anterior. La viscosidad horizontal se fue reduciendo en el tiempo de inicialización hasta un valor de $50 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. La parametrización de la viscosidad turbulenta vertical se consideró constante igual a $0.0001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ multiplicada por un modificador para tener en cuenta la estratificación como el indicado por la fórmula 3.36. El sistema se ha iniciado con la salinidad y temperatura de la frontera abierta en todo el dominio y se ha supuesto un tiempo de relajación de 10 días.

Se muestran a continuación (figuras 6.10 y 6.11) los campos de velocidades en el fondo y la superficie para las situaciones de flujo y reflujos para 5 días después del período de relajación. En la situación de flujo de marea se comprueba como la capa superficial refleja la tendencia del agua más dulce a salir a pesar de estar la marea subiendo. El choque del frente de agua del río con la marea entrante sumado a la fuerza de Coriolis produce la desviación de los vectores hacia la orilla norte. Como se comprobará más adelante, esta imagen muestra el movimiento de una capa superficial muy fina. Este movimiento, contrario a la marea se restringe al área donde existe el frente, desapareciendo en las zonas donde la columna es más homogénea, por ejemplo a partir del Estrecho de Rande hacia el interior. La capa del fondo muestra la corriente de marea, sumada al forzamiento baroclínico, que acelera el agua que entra por la Boca Sur. La situación de reflujos de la marea muestra el acoplamiento del forzamiento baroclínico y la marea en la capa superficial, que aumenta la tendencia del agua a pegarse a la orilla Norte y la velocidad de salida de esta.

En el fondo, por el contrario, el forzamiento baroclínico actúa como freno a la salida del agua.

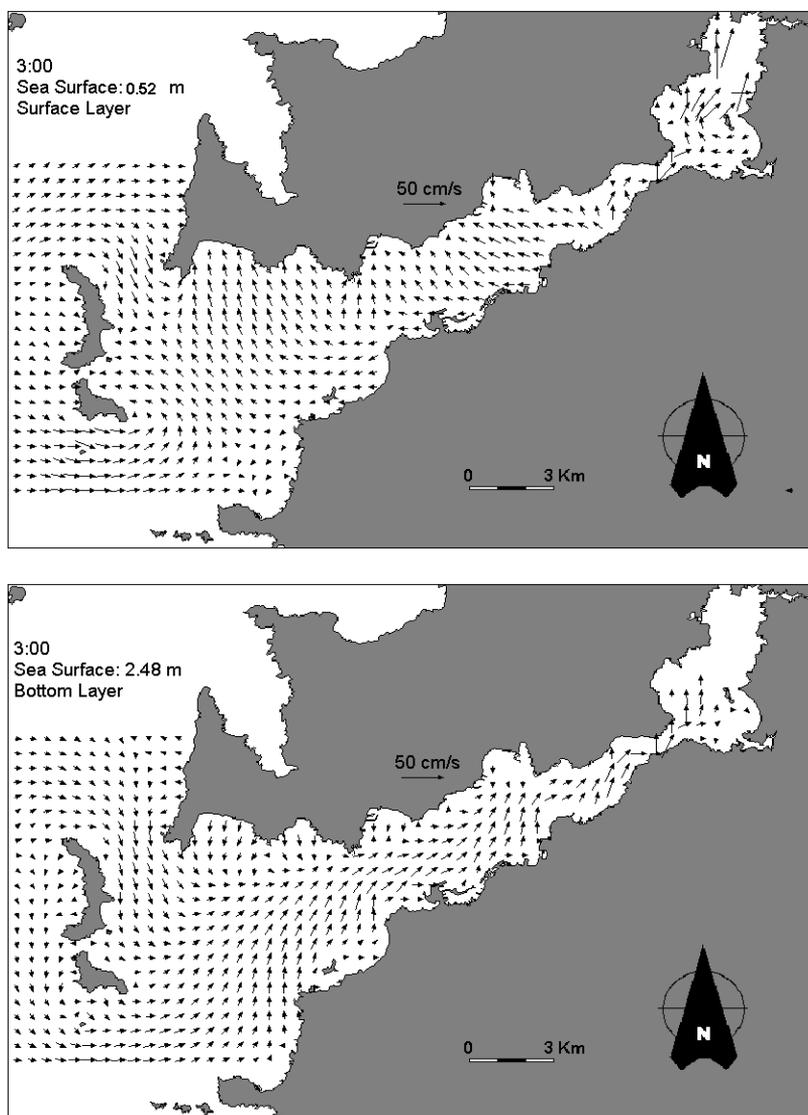


Figura 6.10: Campo de velocidades producidas por la marea y campo de densidad para la capa superficial y fondo, en una situación de flujo. Elevación respecto al nivel medio.

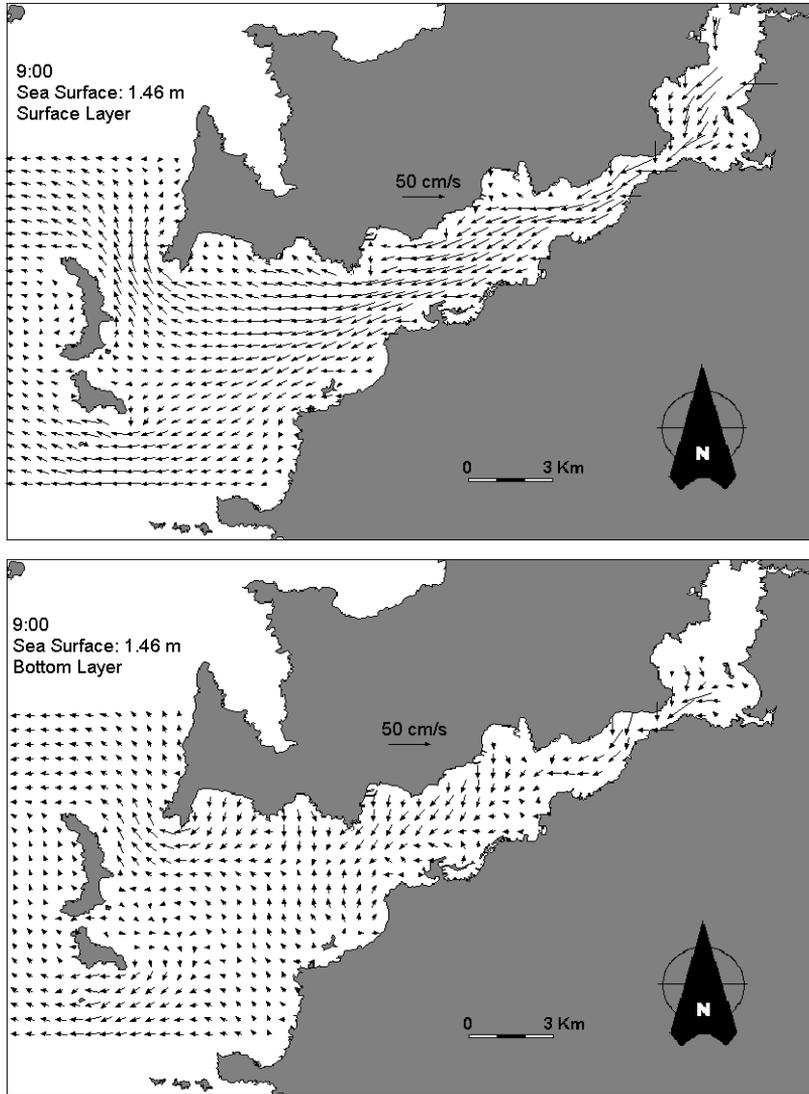


Figura 6.11: Campo de velocidades producidas por la marea y campo de densidad para la capa superficial y fondo, en una situación de reflujos. Elevación respecto al nivel medio.

En las siguientes gráficas (6.12 – 6.15) se muestran los campos de salinidad y temperatura para las situaciones de marea alta y marea baja, en la capa superficial y capa del fondo. Se escogen estas situaciones por ser las que presentan una mayor diferencia entre sí. Debido a que la situación representada se corresponde a una situación de invierno, donde es el caudal del río el

principal causante de las diferencias de los campos anteriores, será el de la salinidad el principal controlador de la densidad y por tanto, de la estratificación de la columna de agua. En las figuras se comprueba como el agua procedente del río, más dulce y más fría se extiende por las capas más superficiales y tiene una gran tendencia a arrimarse a la orilla derecha en su salida. Al mismo tiempo, el agua procedente del océano entra principalmente por las capas más profundas y arrimándose a la orilla Sur. Las isolíneas tienden a juntarse en los estrechamientos, especialmente en Rande, que separa dos partes de la Ría de Vigo muy diferenciadas: la Ensenada de San Simón y el resto de la ría.

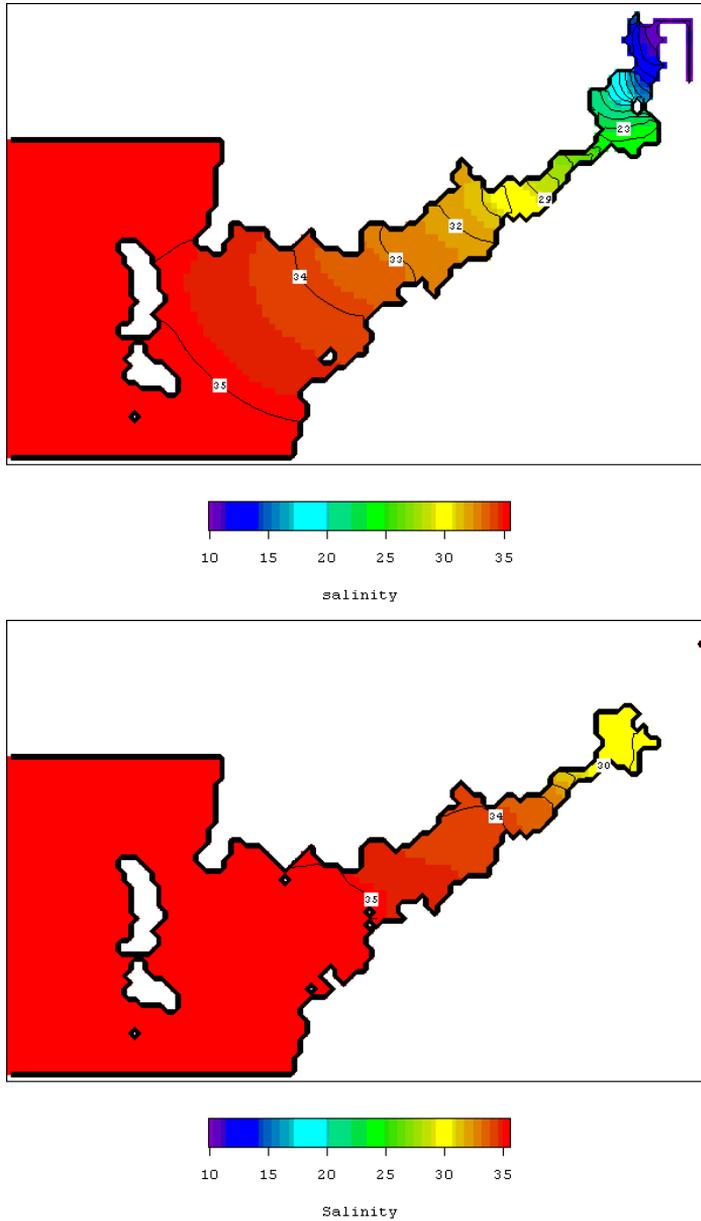


Figura 6.12: Salinidad simulada para la capa de la superficie y la capa del fondo correspondiente a las 0:00 horas del día 14/03/86 (marea baja).

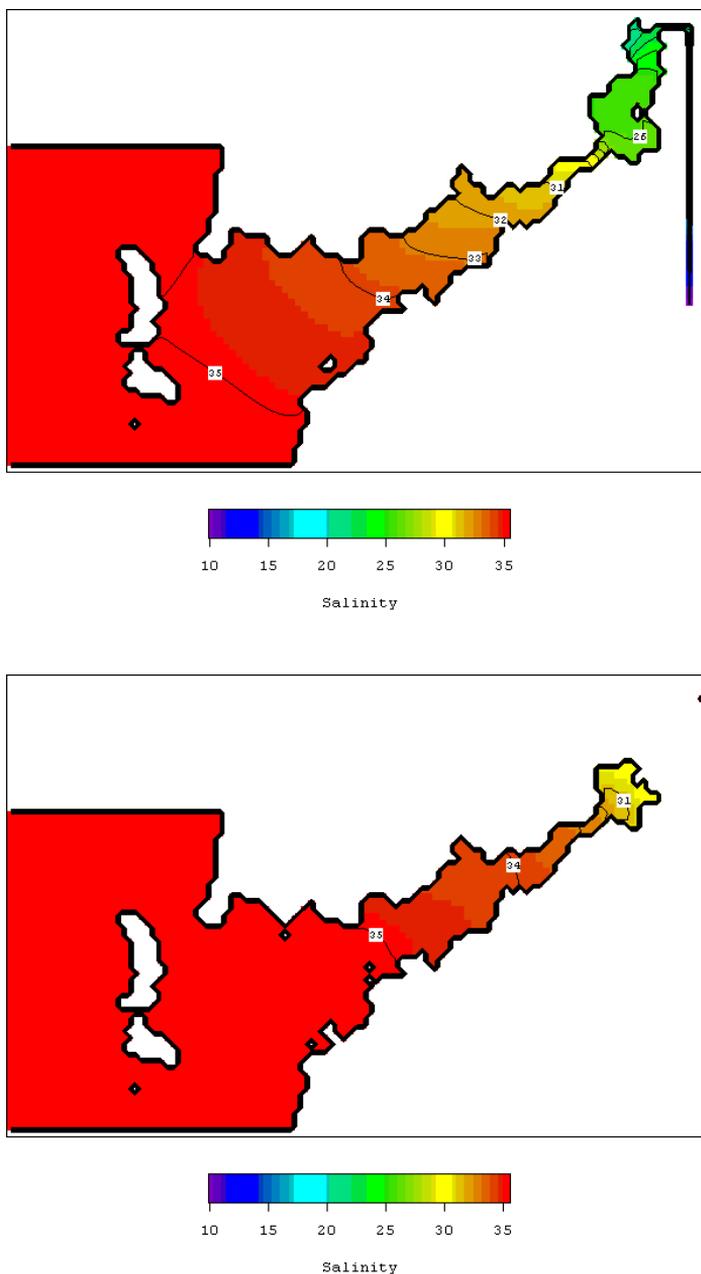


Figura 6.13: Salinidad simulada para la capa de la superficie y la capa del fondo correspondiente a las 9:00 horas del día 14/03/86 (marea alta).

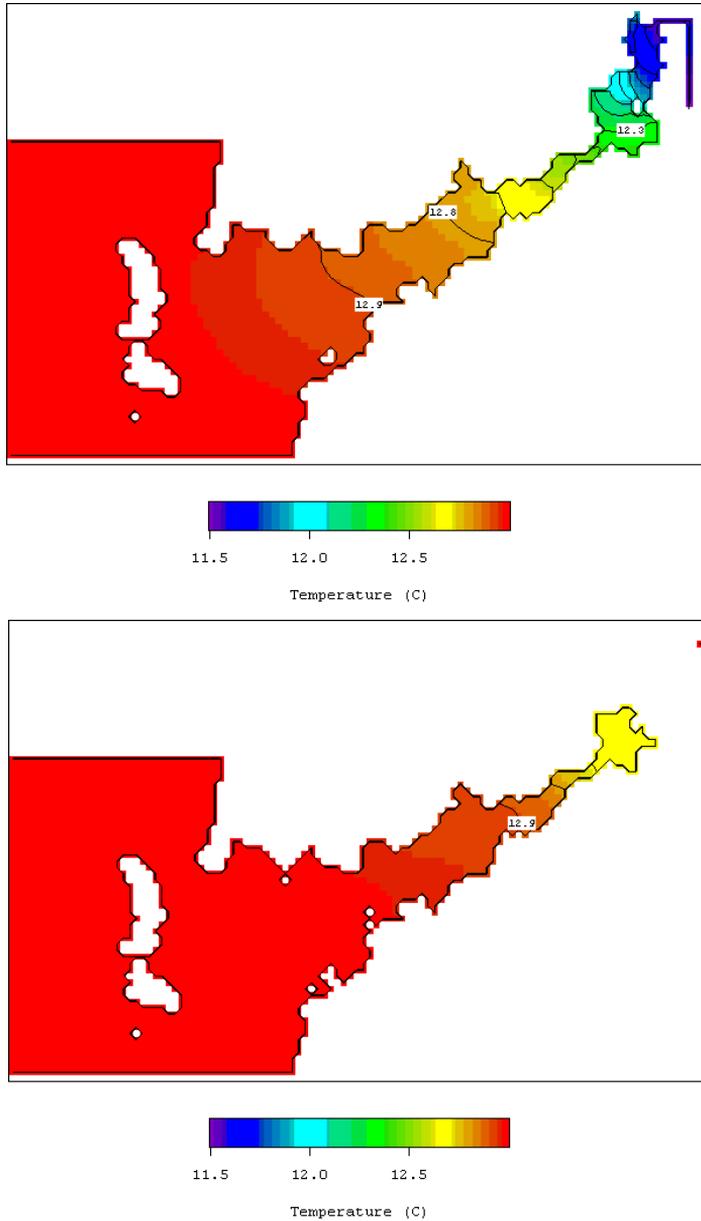


Figura 6.14: Temperatura simulada para la capa de la superficie y la capa del fondo correspondiente a las 0:00 horas del día 14/03/86 (marea baja).

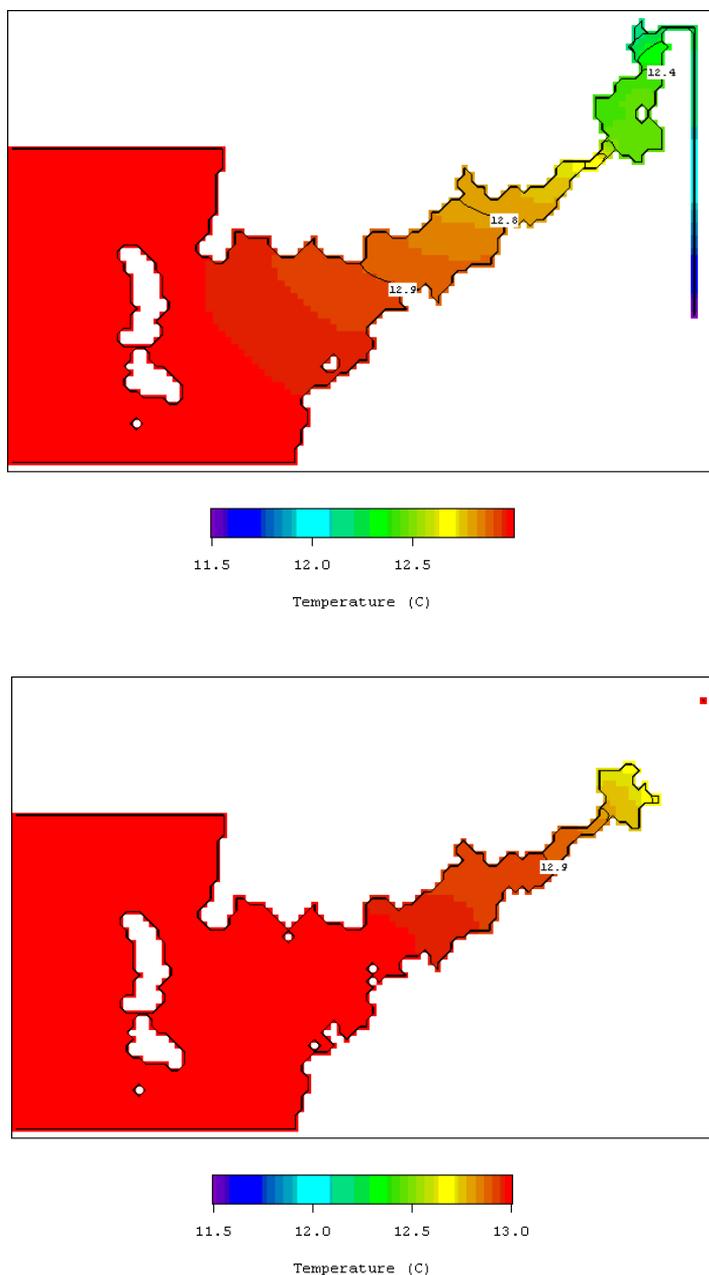


Figura 6.15: Temperatura simulada para la capa de la superficie y la capa del fondo correspondiente a las 9:00 horas del día 14/03/86 (marea alta).

En las siguientes figuras (6.17 – 6.22) se muestran el campo de velocidad y salinidad para un corte axial y dos secciones transversales, tal y como muestra la figura 6.16.

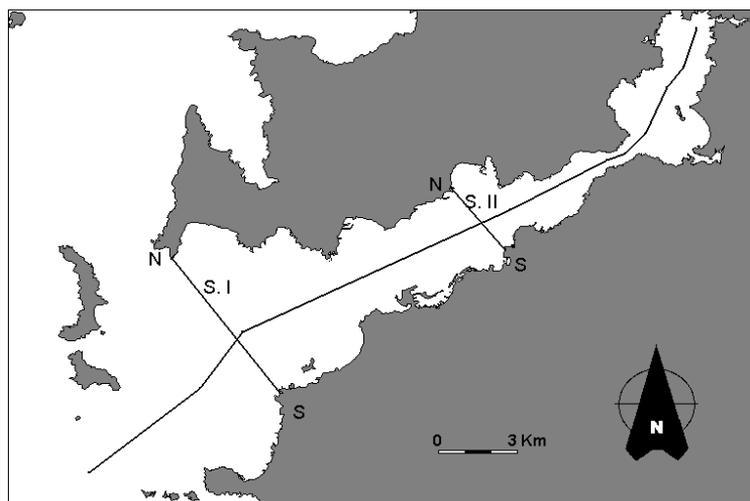


Figura 6.16: Corte axial y transversales en los que se va a representar el campo de velocidades y salinidad.

Los figuras se corresponden a los instantes 0:00, 3:00, 6:00 y 9:00 horas del día 14 de marzo de 1986, siendo estos momentos los de marea baja, flujo, marea alta y reflujó. Se representa solamente la salinidad, por ser el campo que influye principalmente en la densidad, como ya se ha dicho. Se ha variado la escala de salinidad de cada figura para una mejor representación de las diferencias de dicha magnitud. El corte axial muestra claramente que la inversión de la marea se produce principalmente a la altura de Bouzas y en Rande. En estos dos puntos, en los momentos en los que la corriente mareal disminuye, se producen una ascensión de las aguas y un remolino vertical levógiro, respectivamente. Esta circulación se da tanto en la marea baja como en la marea alta, por lo que se estima que son estructuras permanentes que subyacen a la corriente de marea. Estos efectos tienen su causa principal en un acoplamiento del forzamiento baroclínico con la batimetría, pues en la simulación barotrópica no aparecen. Así, el frente de agua dulce promociona la salida de agua por la superficie, al mismo tiempo que induce la entrada de agua salada por el fondo. En los casos de flujo y reflujó, se comprueba que, aunque

la marea es el principal motor, estos forzamientos subyacen al movimiento general del agua. Así, por ejemplo, cuando la marea sube, se intuye un frente saliente muy debilitado por una capa superficial muy fina, que ya se había comprobado que existía en las imágenes de las velocidades en horizontal. En la misma situación, el agua entrante es mayor en todas las capas inferiores, menos en la del fondo, donde el efecto del rozamiento supera al forzamiento baroclínico. De la misma forma, al bajar la marea, el agua de la superficie muestra un aceleramiento respecto al resto de la columna, debido a los efectos combinados de la marea y el campo de densidad. La tendencia a entrar agua por el fondo se traduce en esta situación en una deceleración de la corriente de la marea en las capas inferiores. Los mapas de salinidad muestran claramente esta tendencia de circulación en doble capa, con una haloclina a los 5 metros de profundidad aproximadamente. Es curioso observar como en el Estrecho de Rande se produce una agrupación de las isohalinas. Es también en esta zona donde las isohalinas van a tener un recorrido mayor entre la marea alta y la marea baja (de 3 km aproximadamente en la mitad de la columna) a diferencia de la mitad de la ría, donde el desplazamiento de la isohalina de 35 en la mitad de la columna es poco más que 1 km. Además, es también en Rande donde la estratificación de la columna es mas pronunciada. Por tanto, se puede concluir que el Estrecho de Rande diferencia dos zonas de la ría con características termohalinas diferentes.

En la representación de las secciones transversales se comprueba también la circulación en doble capa. Prácticamente en todas las situaciones se mantiene un frente de agua dulce saliente, aunque por supuesto, en la situación de flujo está muy debilitado. También en todas las situaciones existe un desplazamiento del agua superficial hacia la derecha (mirando hacia la boca de la ría). Al mismo tiempo, el agua profunda tiende a arrimarse a la orilla sur. En la sección I esta tendencia es menos marcada, pero se debe a la influencia de la existencia de la Boca Norte. De todos modos, se percibe claramente una circulación lateral dextrógira. Las isolíneas de velocidad axial muestran claramente un encañonamiento del agua entrante por el fondo en la situación de flujo, y de agua saliente por la superficie en el reflujó, lo que viene a confirmar un transporte neto en doble capa. Observando los mapas de salinidad se observa perfectamente como el agua dulce sale por las capas más superficiales. Al mismo tiempo, el agua más salada se concentra en la orilla izquierda y en el fondo. De la misma forma, el agua dulce se arrima a la orilla derecha. Las isohalinas no presentan grandes variaciones para los diferentes momentos de la marea.

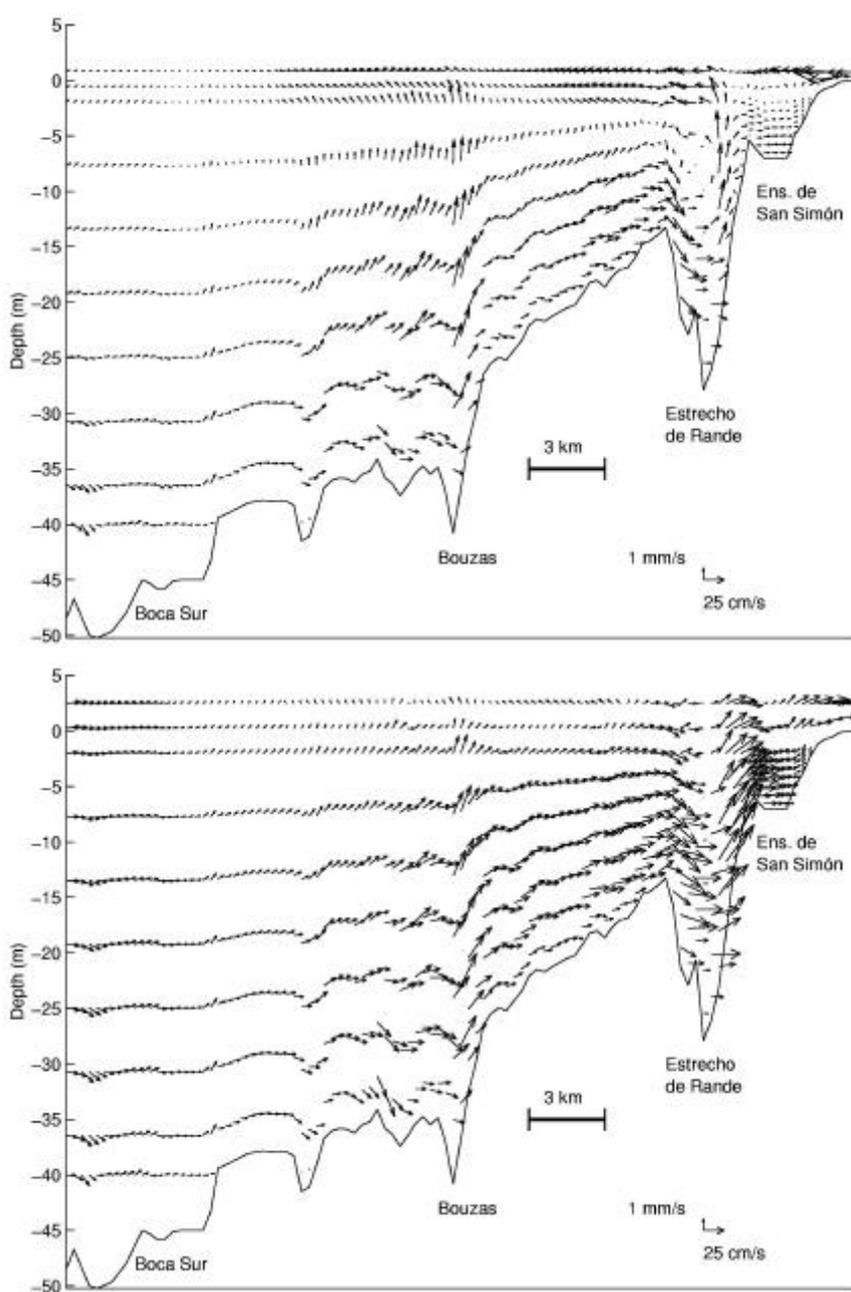


Figura 6.17: Velocidad para el corte axial representado en la figura 6.16 en los instantes 0:00 (marea baja) y 3:00 horas (flujo) del día 14/03/86.

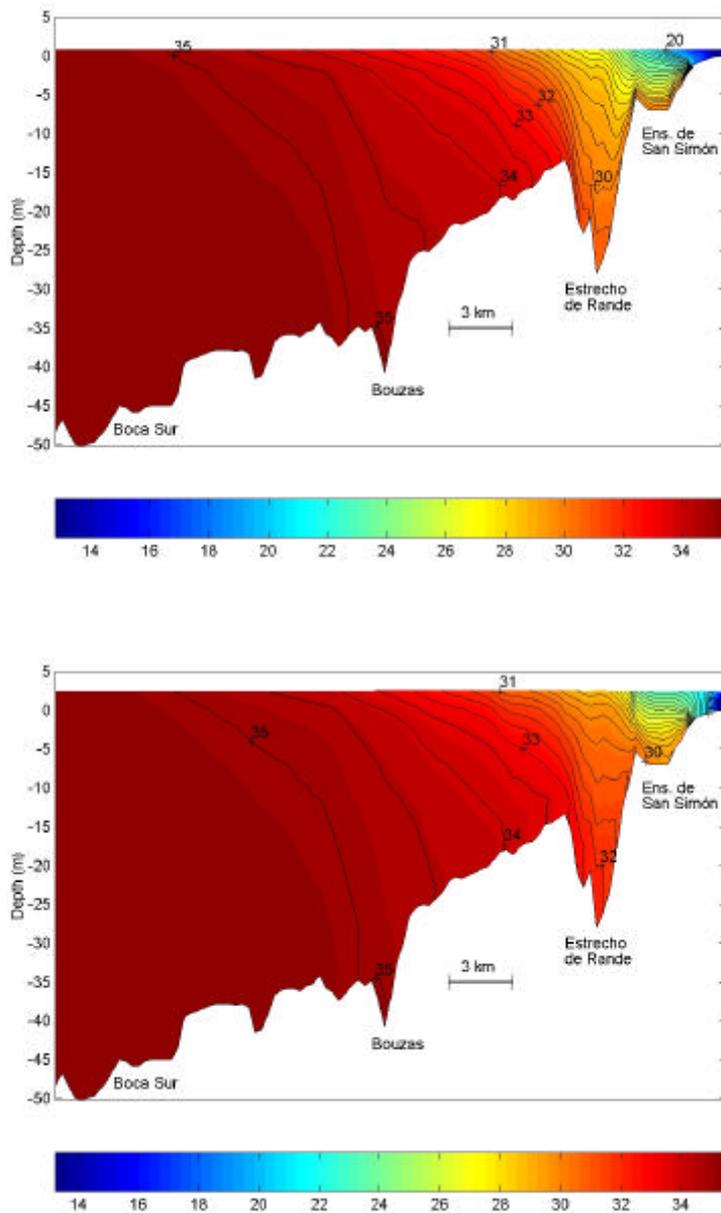


Figura 6.18: Salinidad para el corte axial de la figura 6.16 en los instantes 0:00 (marea baja) y 3:00 horas (flujo) del día 14/03/86. Isohalina cada 0.5.

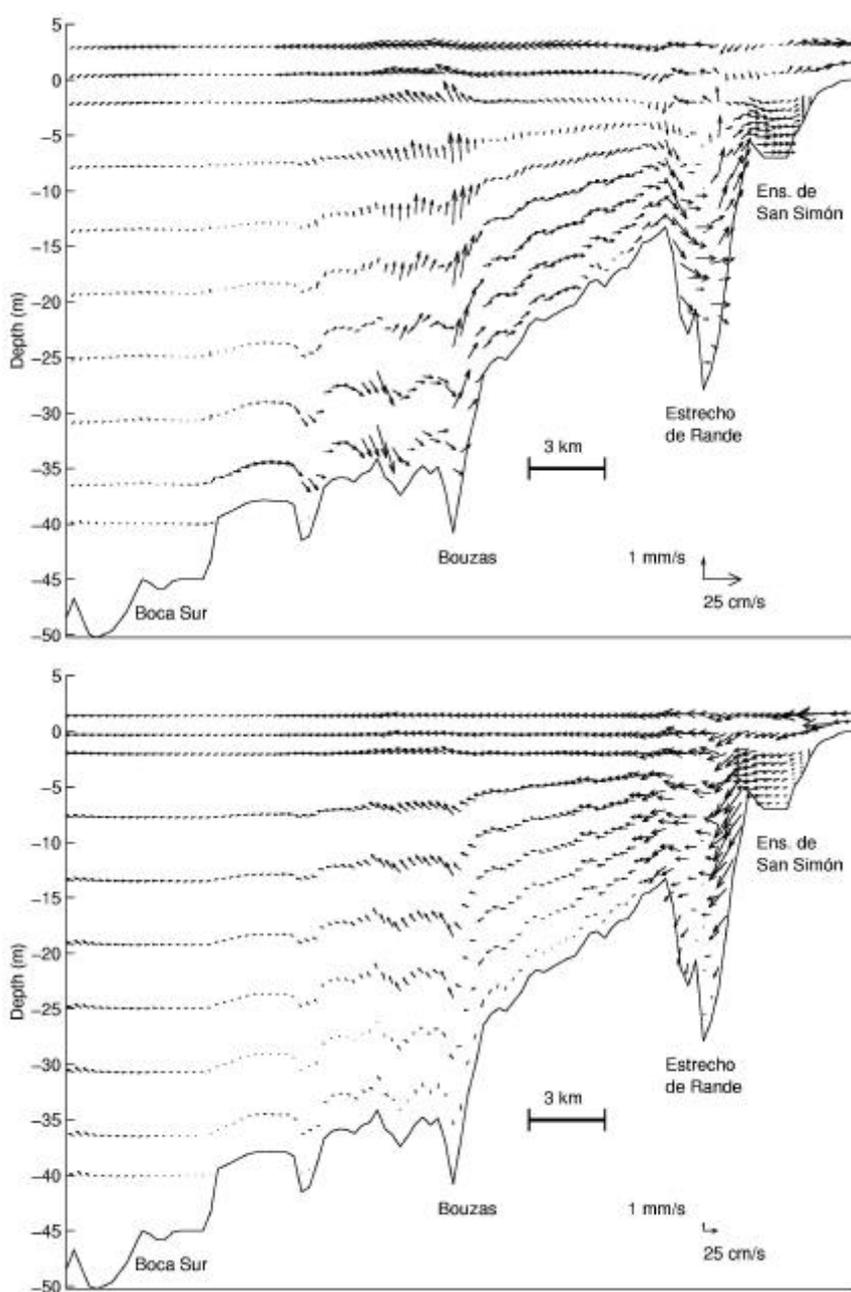


Figura 6.19: Velocidad para el corte axial representado en la figura 6.16 en los instantes 6:00 (marea alta) y 9:00 horas (reflujo) del día 14/03/86.

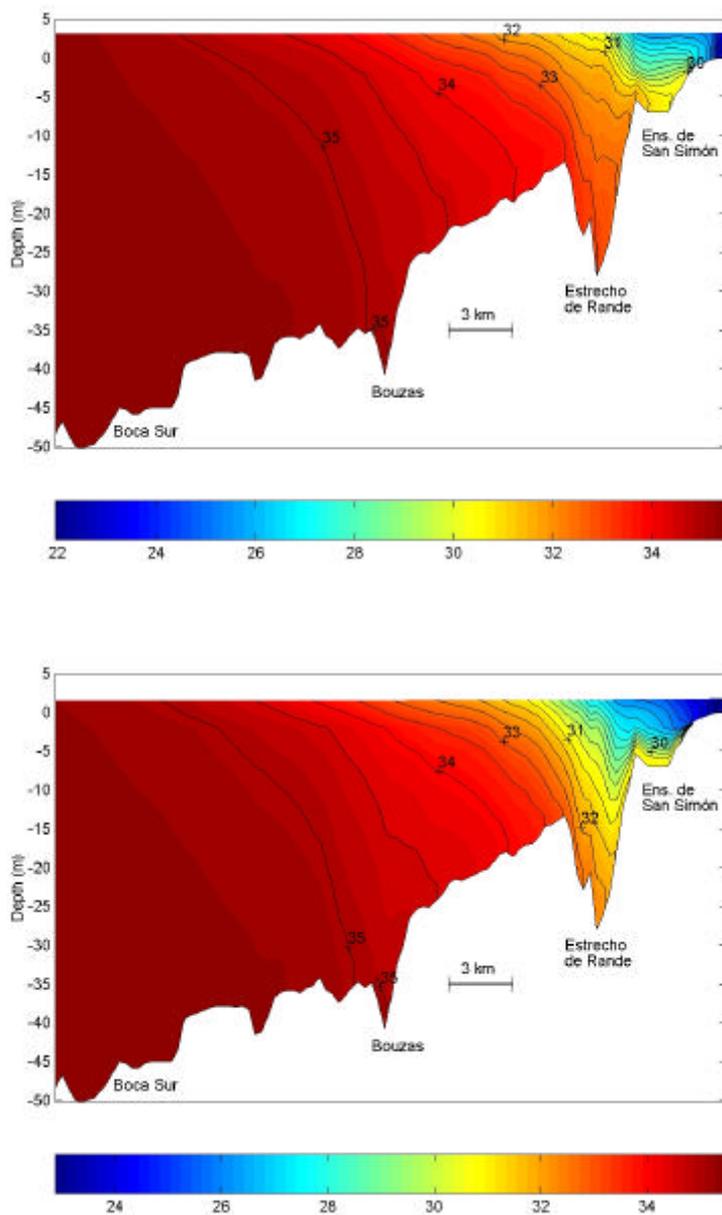
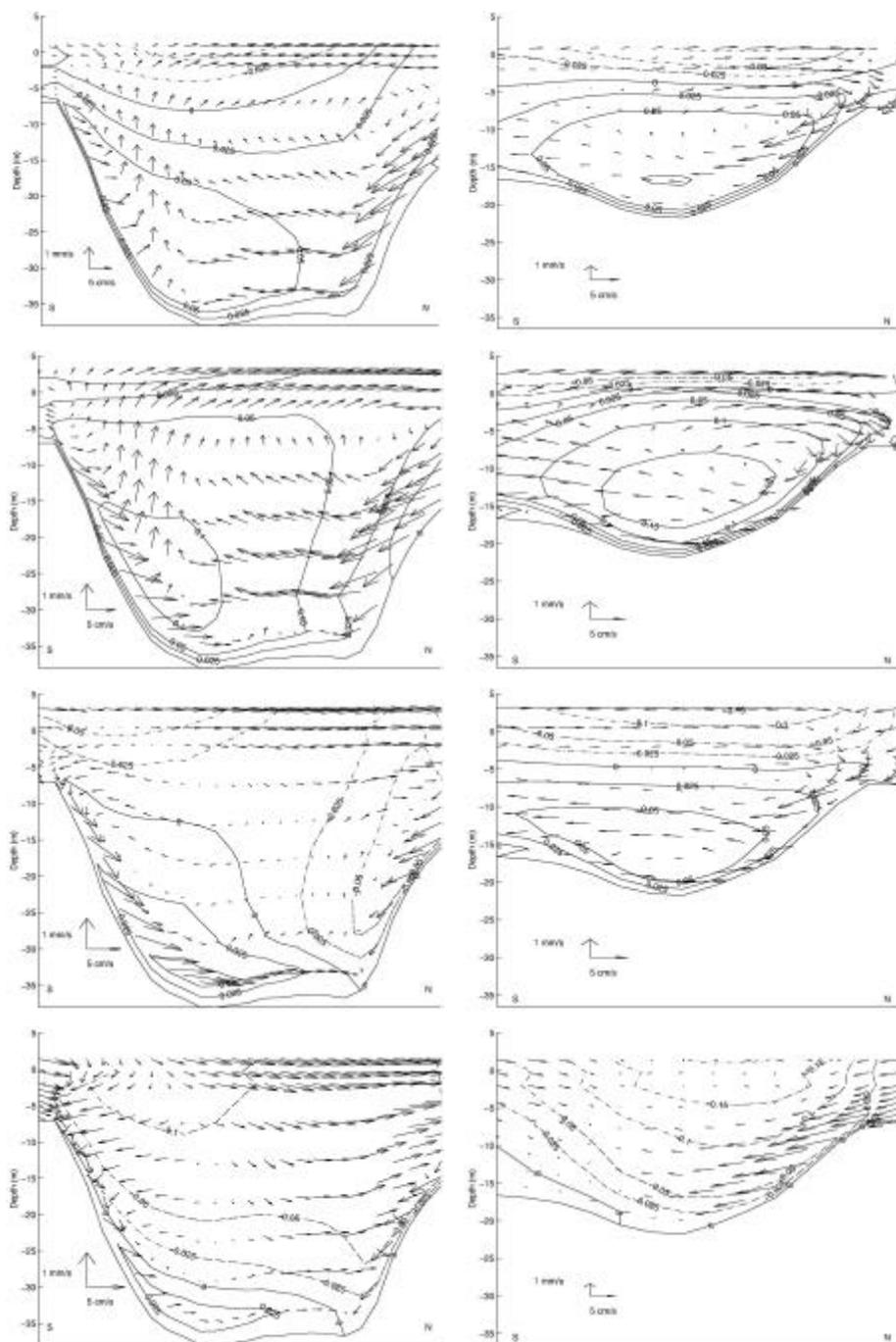
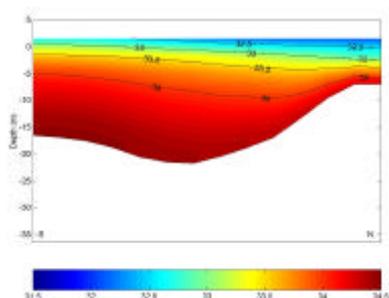
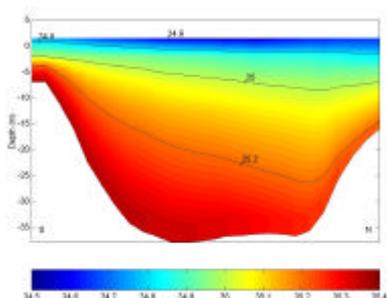
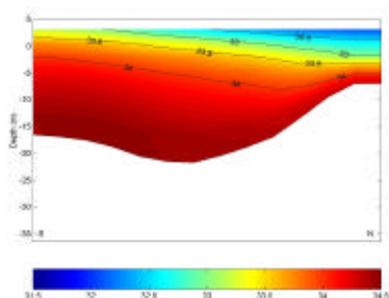
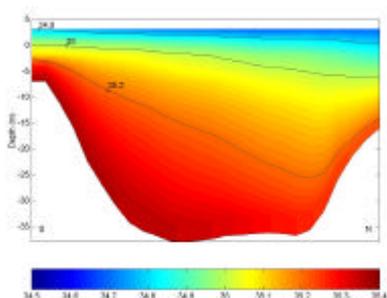
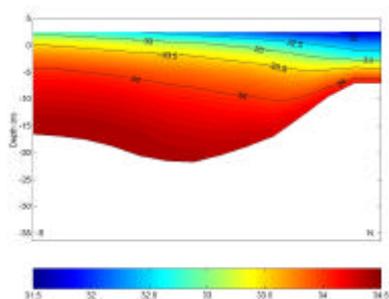
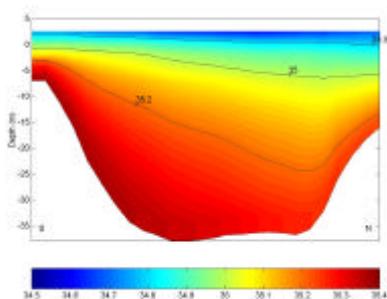
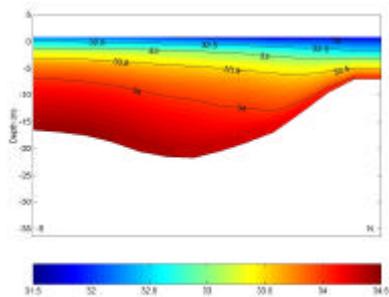
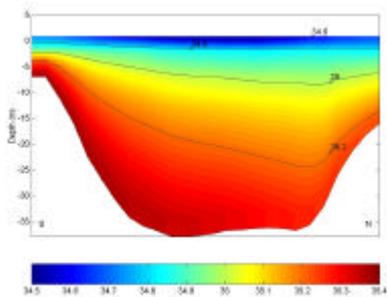


Figura 6.20: Salinidad para el corte axial de la figura 6.16 en los instantes 6:00 (marea alta) y 9:00 horas (reflujo) del día 14/03/86. Isohalina cada 0.5.





Figuras de las páginas anteriores:

Figura 6.21: Campo de velocidades para la sección I (izquierda) y II (derecha) representada en la figura 6.16 en los instantes 0:00 (marea baja), 3:00 (flujo), 6:00 (marea alta) y 9:00 horas (reflujo) del día 14/03/98. Las isolíneas muestran la velocidad que atraviesa el papel. Isolínea continua: dirección hacia el fondo de la ría, isolínea discontinua: dirección hacia la boca de la ría. En las dos secciones, la orilla Norte está situada a la derecha.

Figura 6.22: Salinidad para la sección I (izquierda) y II (derecha) representada en la figura 6.16 en los instantes 0:00 (marea baja), 3:00 (flujo), 6:00 (marea alta) y 9:00 horas (reflujo) del día 14/03/98. En las dos secciones, la orilla Norte está situada a la derecha.

6.5 Corriente residual

Como ya se ha dicho, la corriente residual es aquella que es responsable del transporte a largo plazo de las masas de agua. En este apartado se va a calcular esta corriente en tres situaciones diferentes correspondientes a periodos de gran aporte fluvial (Enero de 1986), aporte intermedio (Mayo de 1986) y época seca (Julio de 1986). La corriente residual euleriana es obtenida a través de los campos de velocidades calculados por el modelo usando la siguiente fórmula

$$u_R = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (6.1)$$

donde u_R es la velocidad residual, u la velocidad calculada por el modelo en cada paso temporal y T un período mucho más grande que el de los principales armónicos de marea.

Para esta simulación se ha utilizado una batimetría con paso espacial de 200 m y girada 30° respecto al Norte. En la discretización vertical se han utilizado dos dominios sigma. El primero se extiende desde el fondo al cero hidrográfico y posee 6 niveles equiespaciados. El segundo, con 2 niveles, va desde el cero hidrográfico hasta la superficie. La razón de la existencia de este dominio es la de asegurar la estabilidad del esquema vertical en las zonas donde la profundidad es muy pequeña. Para la inicialización del modelo se usan datos de salinidad y temperatura del año 1986 (Prego *et al.*, 1988) así como para los valores del campo de densidad en la frontera abierta. Ésta ha sido además forzada con la imposición de la onda de marea. Los caudales del Oitabén-Verdugo utilizados para los diferentes períodos eran $119 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (Enero), $8.4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (Mayo) y $1.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (Julio). En este caudal se intenta de forma simple, recoger todos los aportes fluviales que vierten a la ría. Los flujos de salinidad y temperatura en la superficie libre fueron considerados constantes. Los demás parámetros utilizados en la simulación son: Paso espacial horizontal: $\Delta x = \Delta y = 200 \text{ m}$, paso temporal: $\Delta t = 30 \text{ s}$, viscosidad y difusividad turbulenta horizontal: $A_H = K_H = 200 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, viscosidad y difusividad turbulenta vertical: $A_V = 0.001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, rugosidad característica $z_0 = 0.0022 \text{ m}$.

En la figura 6.23 se muestra los campos de velocidad residual en la capa superficial para las tres situaciones. Se puede comprobar como la corriente residual en la capa superior es hacia fuera de la ría en las tres situaciones. Esta corriente se puede dividir en dos, una que sigue el eje de la ría y otra hacia la Boca Norte, más fuerte que la primera, y que se supone reforzada por la fuerza de Coriolis. Según la estación es más seca, la circulación en la capa de arriba se hace más débil, llegando en el mes de Julio a perderse este tipo de circulación a la altura de Cabo Home y Toralla. En la figura 6.24 se representan los campos de velocidades en la capa del fondo correspondientes a las mismas situaciones. Se comprueba que la corriente residual fluye hacia el interior como era de esperar, y así, esta corriente se incrementa según sea mayor el aporte fluvial. Se comprueba también que la entrada de agua se produce principalmente por la Boca Sur, menos en el caso del mes de Julio, que como ya se ha visto, no presenta circulación de doble capa en la zona fronteriza. Por otra parte, en el interior de la Ensenada de San Simón no se observa un patrón definido en la capa profunda, lo cual es lógico, si se tiene en cuenta su escasa profundidad. La situación obtenida en el mes de Julio se corresponde a la predicha por Prego & Fraga (1992) para una situación de verano sin afloramiento.

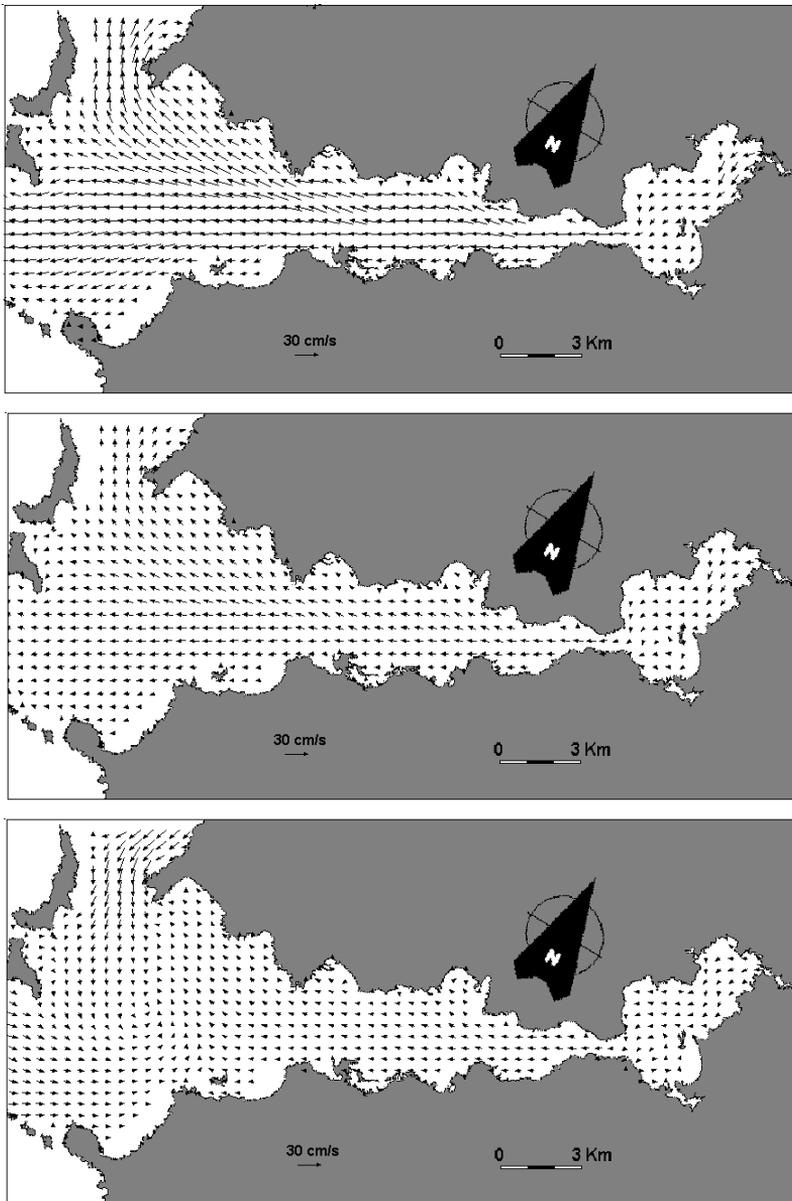


Figura 6.23: Circulación residual en la capa superficial durante tres situaciones diferentes: Febrero, con una descarga fluvial de $119 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; Mayo, con un aporte fluvial de $8.4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; y Julio, con un aporte de $1.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

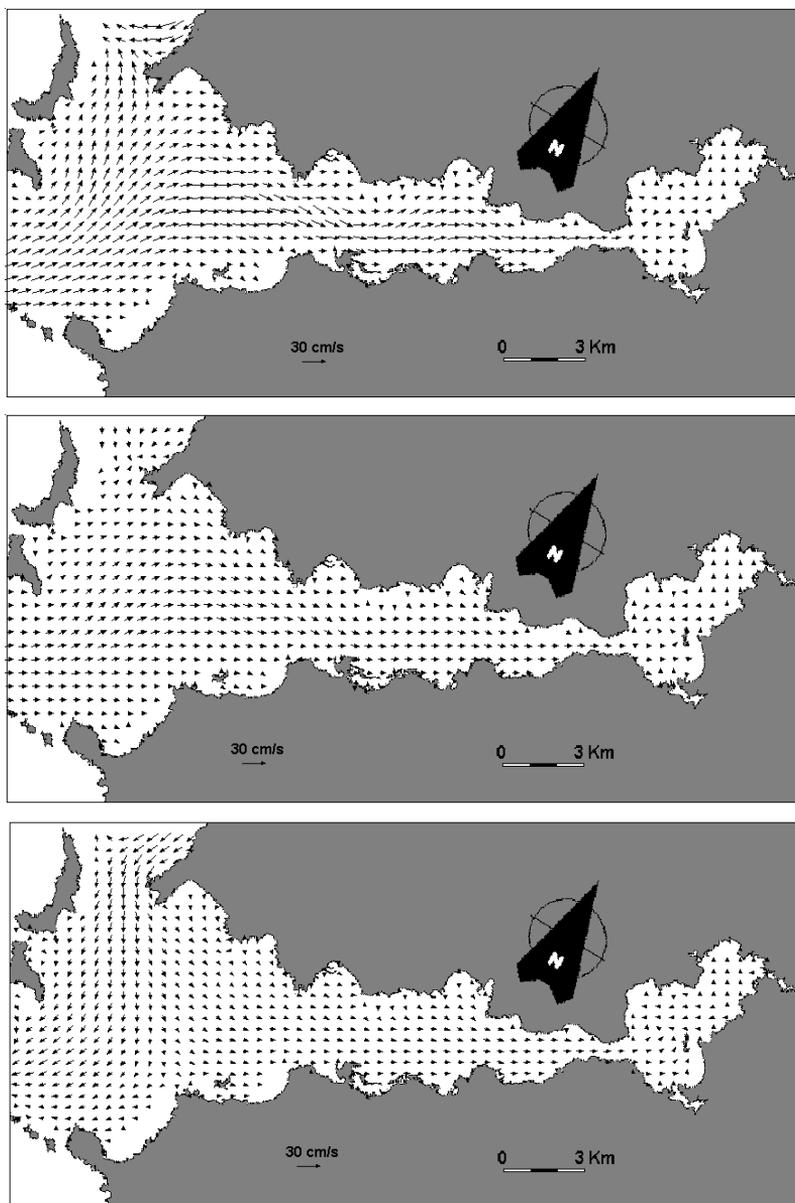


Figura 6.24: Circulación residual en la capa del fondo durante tres situaciones diferentes: Febrero, con una descarga fluvial de $119 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; Mayo, con un aporte fluvial de $8.4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; y Julio, con un aporte de $1.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Se ha calculado además el nivel ZL (Zero Layer) donde la velocidad residual era cero para las tres secciones que indica la siguiente figura, así como los flujos que atraviesan estas secciones.

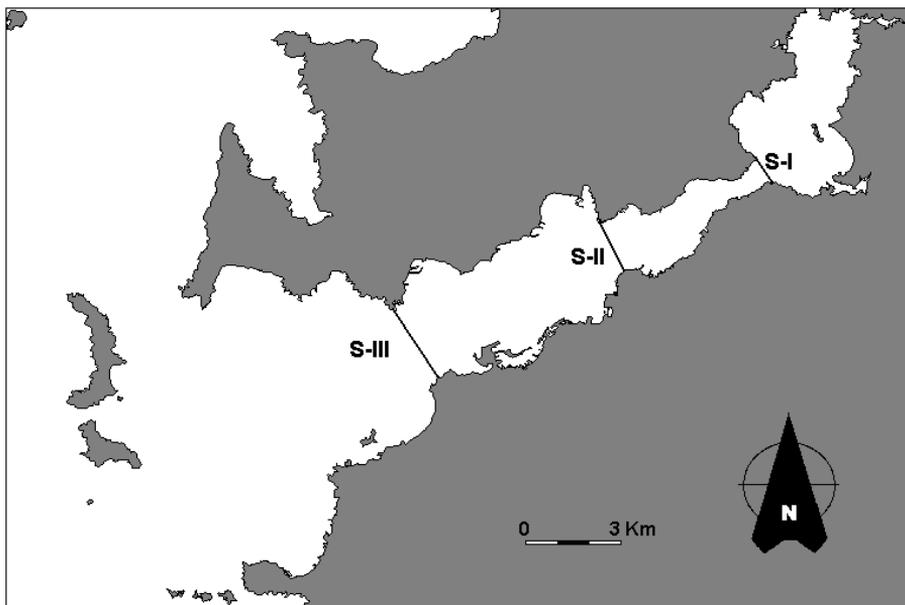


Figura 6.25: Secciones donde se han calculado los flujos de la corriente residual y el nivel cero, ZL.

En la figura 6.26 se muestra el nivel cero para las secciones II y III en el mes de Febrero. No se ha representado la sección I debido a su estrechez. Se puede comprobar como la capa superficial de la corriente residual es una capa de salida del agua mientras que por los niveles inferiores el agua tiende a entrar. Se muestra también que la capa de la superficie, por la que el agua sale, es más estrecha que la capa del fondo. Además tanto en la sección II como en la III, el nivel cero va a seguir ligeramente la forma de la batimetría. En la sección III el agua que penetra en la ría lo hace mayoritariamente por el canal principal. Por último, señalar que el nivel cero también es más profundo cuanto más se acerca a la boca de la ría, alcanzando en la sección II casi los 10 m mientras que en la sección III supera los 15 m en su parte más profunda. La situación se repite de modo cualitativo para los meses de Mayo y Julio. Esto coincide con los resultados instantáneos de la simulación baroclínica.

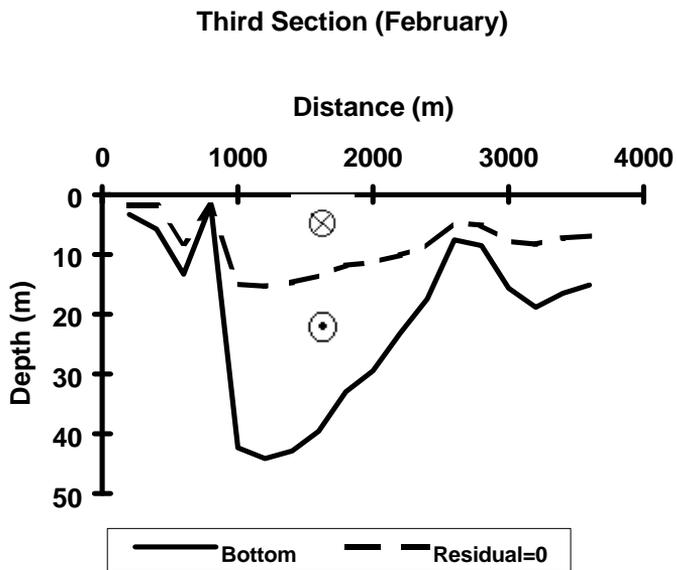
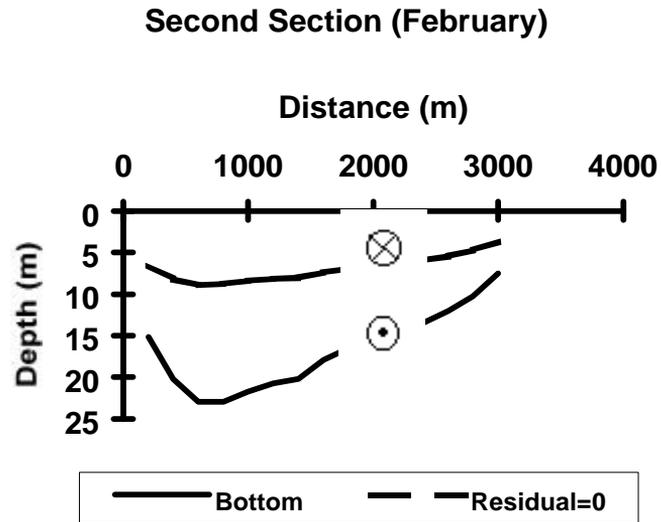


Figura 6.26: Perfil de la profundidad del nivel de corriente residual cero y la batimetría para la sección II y III en el mes de Febrero. En esta figura, la orilla Norte esta a la derecha.

Los resultados de la corriente residual en estas tres secciones se han comparado con los resultados de un modelo de cajas que ha sido aplicado para la misma época (Prego & Fraga, 1992), tal y como aparece en la tabla 6.2.

	Sección I		Sección II		Sección III	
Febrero						
Modelo	3D	Cajas	3D	Cajas	3D	Cajas
Nivel Cero	7.5	4.1	6.3	6.0	8.5	8.5
Vel. Entrante	2.7	3.3	5.5	2.4	7.9	2.0
Vel. Saliente	5.5	9.7	8.3	5.5	11.1	4.7
Mayo						
Modelo	3D	Cajas	3D	Cajas	3D	Cajas
Nivel Cero	7.6	5.4	6.5	6.8	8.9	9.3
Vel. Entrante	1.4	1.2	2.5	0.6	2.9	0.4
Vel. Saliente	2.3	1.8	3.4	1.4	3.8	0.9
Julio						
Modelo	3D	Cajas	3D	Cajas	3D	Cajas
Nivel Cero	6.4	6.3	7.1	7.8	9.3	9.5
Vel. Entrante	1.8	1.4	1.5	0.6	1.0	0.2
Vel. Saliente	1.7	1.9	2.2	1.2	1.2	0.8

Tabla 6.2: Comparación de los resultados con los obtenidos a través de un modelo de cajas, en las situaciones de Febrero, Mayo y Julio. La velocidad viene dada en cms^{-1} y la profundidad del nivel cero en m.

Se observa que ambos modelos concuerdan con la estimación del nivel cero para las secciones II y III. En la sección I el modelo muestra una capa más profunda para la situación de Febrero y Mayo, siendo prácticamente igual en Julio. La discrepancia entre ambos modelos es mayor para el caso de las velocidades. Los valores de éstas son comparables, aunque en la mayor parte de los casos son siempre mayores los resultados del modelo numérico que los obtenidos con el modelo de cajas. Además, es interesante observar como existe en las tres situaciones una tendencia a aumentar las velocidades calculadas por el modelo numérico a medida que nos acercamos a la boca de la ría mientras que en el modelo de cajas esta tendencia es inversa.

Para concluir, los valores del nivel cero obtenidos por el modelo 3D muestran una variación muy pequeña entre los tres casos (inferior al 10 %) mientras que en las velocidades esta diferencia es mayor. En la primera y segunda sección, la media de la velocidad residual saliente y entrante es aproximadamente un 50 % más pequeña en el mes de Mayo que en Febrero. En la tercera sección, la diferencia es mayor. En Julio, las velocidades son aproximadamente de un orden de magnitud inferior a las de Febrero.

6.6 Simulación de afloramiento local

Como se ha descrito en el segundo capítulo, el afloramiento costero se produce por el desplazamiento hacia el oeste de las masas de agua superficial que son arrastradas por vientos procedentes del Norte. Así, el agua situada a unos 300 m de profundidad asciende hacia la superficie, situando la termoclina de 13 °C a muy poca profundidad y penetra en el interior de la ría. Dicha entrada en la ría es favorecida por los vientos de componente Norte y Nordeste que soplan en el interior de ésta. La simulación siguiente trata de simular esta situación de afloramiento local en el interior de la ría o microafloramiento.

El área se ha extendido hasta la isobata de 150 m para alejar las condiciones de contorno. La situación se ha forzado con un viento Norte de 5 ms^{-1} en la parte costera del área así como en el interior de la ría. La frontera tiene condiciones de radiación forzada. Se han utilizado 8 capas para esta simulación, 6 en un dominio sigma que va desde el fondo hasta los 10 m y 2 niveles en el dominio sigma superficial. Esto es debido a que el transporte de Ekman queda confinado a los primeros 10 m (Blanton *et al.*, 1984). Los parámetros utilizados son los mismos que en la simulación baroclínica. El coeficiente de arrastre del viento se supuso $1.14 \cdot 10^{-3}$. Como variable baroclínica y debido a que el afloramiento suele suceder en meses de poco aporte fluvial se ha considerado solamente la temperatura, suponiendo la salinidad constante e igual a 35.5. La temperatura se inicializa, tal y como se ha dicho, con una termoclina a los cincuenta metros que separan una zona profunda de 13 °C de otra superficial de 17 °C. El forzamiento baroclínico se usa simplemente por su influencia en la estratificación. La viscosidad vertical se ha supuesto constante e igual a $0.001 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ modificada por una función que tenga en cuenta la estratificación como la ecuación 3.36. Otras formas de parametrizar la viscosidad como las propuestas por Leendertsee y Liu (ecuación 3.32) y Nihoul (ecuación 3.33) se han probado, pero daban como resultado una mezcla vertical muy superior a la esperada.

En la figura 6.27 se presenta la velocidad en la superficie y en el fondo al cabo de 24 horas de simulación. Se puede observar como el viento arrastra la capa superficial hacia el WSW como es de esperar. Al retirar esta masa de la superficie y debido a la existencia de una pared occidental, el agua del fondo se desplaza hacia el Este, aflorando finalmente por dicha pared.

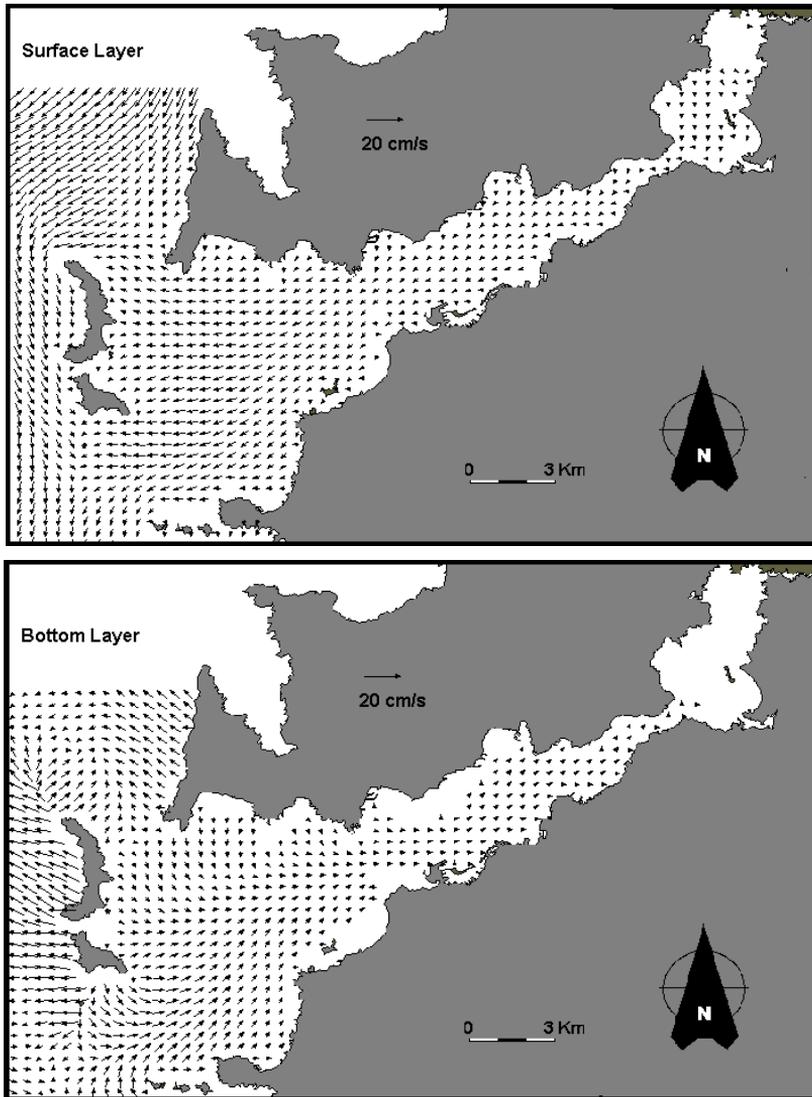


Figura 6.27: Campos de velocidades en la superficie y el fondo forzados con un viento Norte de 5 m s^{-1} , al cabo de 24 horas.

Se comprueba perfectamente la entrada de agua por el fondo de la ría y la salida hacia el Oeste Sudoeste del agua superficial. En todas las simulaciones, tanto barotrópicas como baroclínicas, aparecía una gran tendencia ascensional del agua enfrente a las Islas Cíes. Junto con esta ascensión existe una entrada de agua en la ría. Esta entrada sin embargo, se reproduce de modo más realista cuando los términos baroclínicos y la estratificación están presentes en el modelo. Se muestra en la figura 6.28 el campo de velocidades para la sección dibujada en la figura 6.29. En ella se comprueba como el agua tiende a ascender delante de las Islas Cíes, y ya en el interior de la Ría de Vigo esta ascensión se ve muy amortiguada

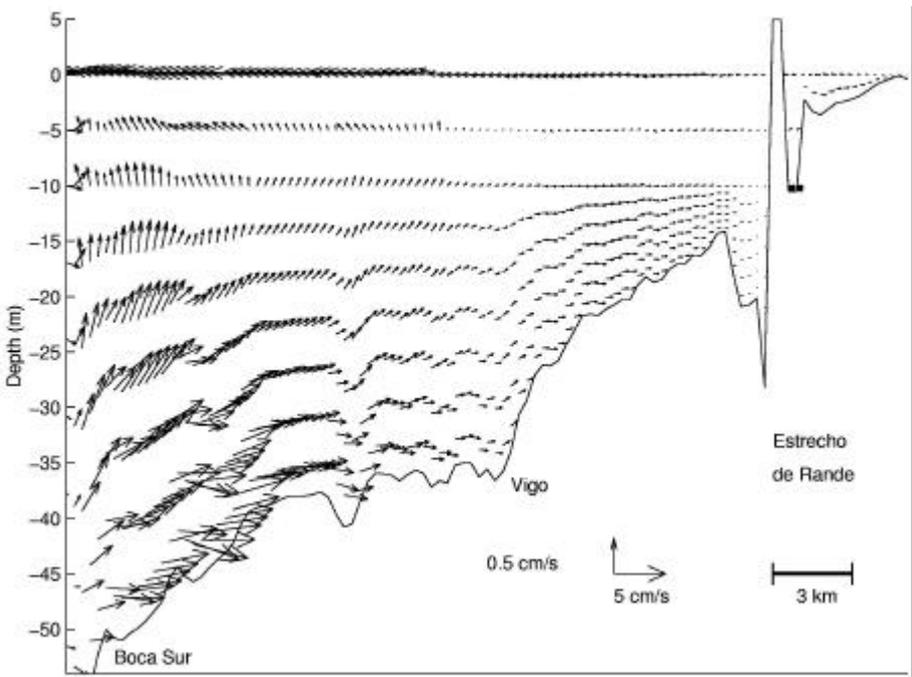


Figura 6.28: Campo de velocidades en la sección de la figura 6.29.

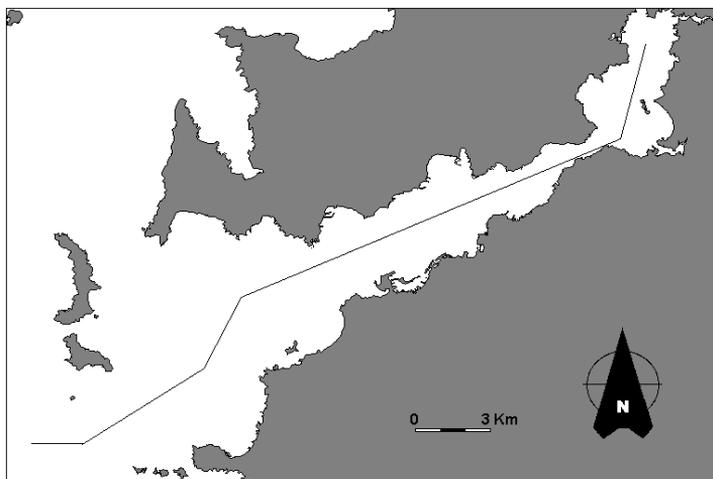


Figura 6.29: Sección donde se muestra el campo de velocidades.

Este tipo de simulación muestra la capacidad del modelo para la reproducción de fenómenos de afloramiento local. Este tipo de simulación podría ser acoplado a un área lo suficientemente grande para reproducir el afloramiento costero que se da frente a las costas de la Península Ibérica. Así, el afloramiento local no sería más el refinamiento en un área de interés de todo un fenómeno que se desarrolla a una escala mayor.

6.7 Simulación en una subárea de interés.

En esta prueba se intenta aplicar el módulo de submodelo para mostrar la capacidad que posee de simular la corriente de marea en una parte del área total de aplicación y que se supone de especial interés. En este caso, el modelo se aplica a la Ría de Vigo, en una simulación de la corriente de marea y el submodelo se restringe a la Ensenada y el Puerto de Bouzas. Un modelo aplicado a esta zona podría ayudar a la previsión y gestión de nuevas obras portuarias. Para ello, la malla debe ser lo suficientemente fina para reproducir con detalle todos los accidentes y construcciones del puerto. Se ha escogido el área hasta la costa Norte para así tener sólo dos fronteras abiertas, tal y como muestra la figura 6.30. El paso espacial del modelo era de 300 m y el del submodelo se ha disminuido hasta 50 m. Para la construcción de la batimetría de la Ensenada de Bouzas se ha utilizado la carta número 9242 editada por el *Instituto Hidrográfico de la Marina* (I.H.M., 1989). El paso temporal del modelo y del submodelo se han escogido de 30 y 2 s respectivamente.



Figura 6.30: Área del submodelo dentro de la Ría de Vigo (cuadrado central). El punto negro muestra donde se representan las series temporales.

La simulación se ha realizado con una sola capa y se ha forzado con la marea en la frontera abierta. Los parámetros utilizados son una rugosidad característica de 0.0025 m y un coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal de $500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ para el modelo y para el submodelo, tras la recalibración, se ha optado por un valor de $150 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Se muestra a continuación la velocidad y la elevación al cabo de 15 y 21 horas en el área del submodelo, correspondientes a situaciones de flujo y refluo de la marea. Se comprueba un mayor detalle tanto de la elevación como de la velocidad en zonas donde el modelo simulaba unos pocos nodos. De hecho, en el caso de la elevación, se perciben las inestabilidades propias de una simulación en áreas donde descubre la marea, como es la orilla Norte y en la parte Este del dique de Bouzas. Se comprueba también, el impedimento de entrada de agua en la Ensenada y Puerto de Bouzas en el flujo y su retención en refluo. Este hecho es debido a la angostura del Puerto de Bouzas, por lo que sería imposible de simular con un paso espacial de 300 m. Las figuras 6.32 y 6.33 muestran dos comparaciones de series temporales de la elevación de marea y del módulo de la velocidad en el punto indicado en la figura 6.30 obtenidas con el modelo y el submodelo. Con estas gráficas se intenta representar la buena concordancia en la representación de la elevación y de la velocidad por parte del submodelo.

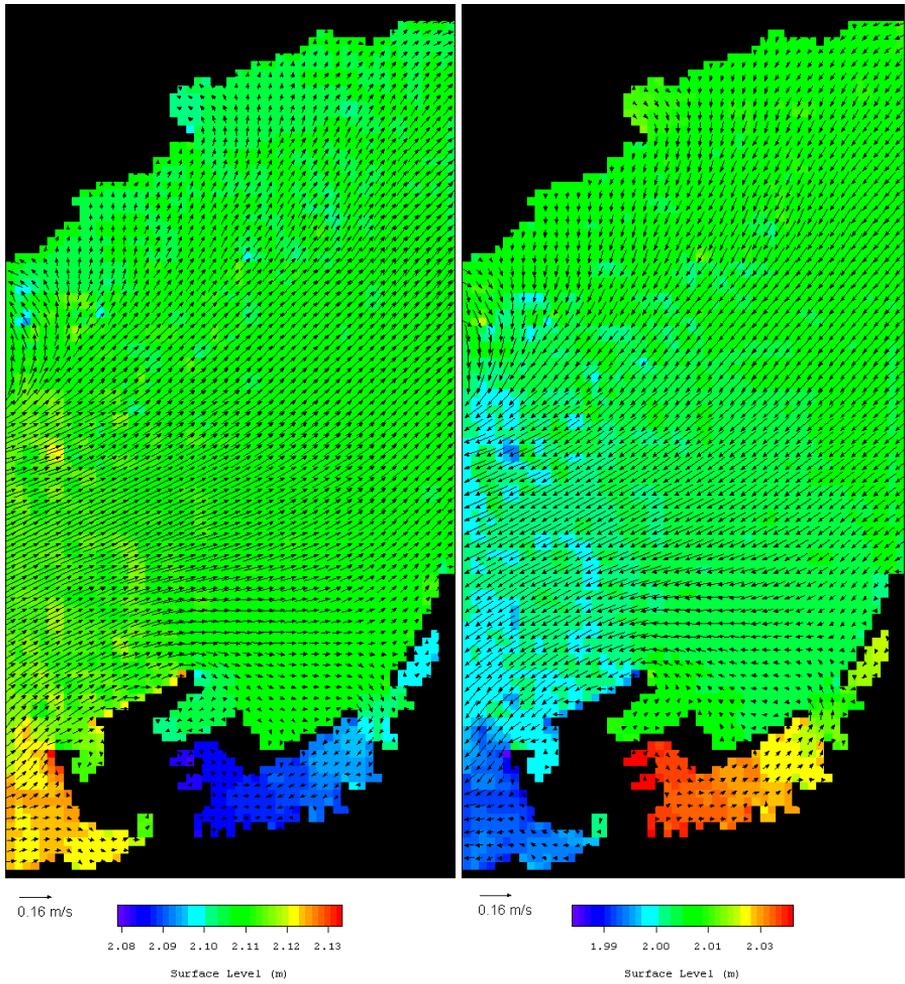


Figura 6.31: Campo de velocidades y nivel de la superficie para el área del submodelo después de 15 y 21 horas de cálculo

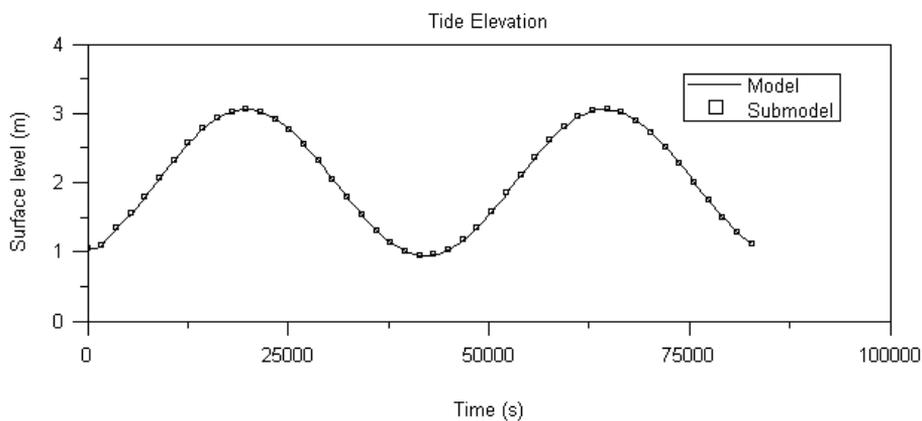


Figura 6.32: Series temporales de la elevación de la superficie obtenidas por el modelo y por el submodelo en el punto indicado en la figura 6.30.

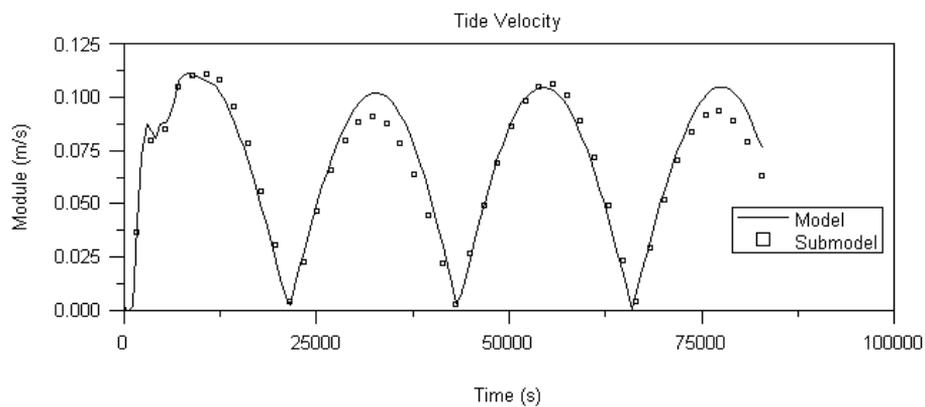


Figura 6.33: Series temporales del módulo de la velocidad obtenidas por el modelo y por el submodelo en el punto indicado en la figura 6.30.

Capítulo 7

7 Conclusiones

En la presente memoria se ha estudiado la hidrodinámica de la Ría de Vigo a través de un modelo de volúmenes finitos con coordenada vertical generalizada. En el desarrollo de este modelo se ha colaborado con el Instituto Superior Técnico de Lisboa, tanto en la depuración del código y su robustez a través de múltiples pruebas, como en la implementación de módulos de cálculo. Se han obtenido las siguientes conclusiones:

1. Se ha caracterizado la corriente de marea y residual en la Ría de Vigo a través de diversos índices, como son, por ejemplo, la distorsión barotrópica de la onda y el número de Richardson estuárico. En la Ría de Vigo existe una corriente residual en doble capa clasificándose como un estuario parcialmente mezclado, variando su extensión según el aporte de agua dulce.

2. Se han desarrollado e implementado condiciones de contorno para la frontera abierta en el modelo tridimensional de volúmenes finitos, comprobando su eficacia para distintas situaciones. Así, las condiciones de radiación se muestran como las más adecuadas para la simulación de ondas originadas en el dominio que deban salir sin verse reflejada en la frontera, como por ejemplo, simulaciones de arrastre del viento en grandes áreas. La condición de Dirichlet reproduce bastante acertadamente la onda de gravedad a partir de datos obtenidos por mareógrafos y los caudales de los aportes fluviales, si la variable a imponer es el flujo. También se ha desarrollado, implementado y probado el módulo de modelos acoplados no interactivos para la simulación de subáreas de interés.

3. Se ha aplicado el modelo al cálculo de la corriente inducida por la marea. Se han comparado las elevaciones de la marea con datos reales procedentes de mareógrafos situados a lo largo de la ría, obteniéndose muy buena concordancia entre ambos.

4. Se ha analizado una situación barotrópica donde además del forzamiento de la marea se introduce un viento variable obtenido a partir de datos reales proporcionados por una estación meteorológica cercana al área de simulación. Se han utilizado datos de velocidades en una columna de agua situada en el interior de la ría para la calibración del modelo 3D.

5. Se ha estudiado una situación baroclínica en la cual la corriente de marea se ve modificada por el campo de densidad, forzado por la influencia del agua oceánica y el aporte fluvial. Se ha comprobado la existencia de circulación en doble capa. Un frente de agua de baja densidad es mantenido en la superficie debido a efectos baroclínicos, teniendo una cierta tendencia a desplazarse próximo a la orilla Norte. Se pone de manifiesto la existencia de un remolino vertical en el Estrecho de Rande en los momentos de inversión de la corriente de marea, así como una tendencia a la ascensión del agua enfrente de la Ensenada de Bouzas. Perfiles transversales muestran la existencia de circulación lateral en sentido dextrógiro fácilmente justificables.

6. Se ha calculado la corriente residual para tres situaciones tipo. Los flujos resultantes del modelo se han comparado con los obtenidos a través de un modelo de cajas, estando ambos en gran concordancia, sobre todo en el cálculo del nivel donde la velocidad residual es cero. Parece ser que la influencia de un mayor aporte fluvial se traduce más en la modificación del valor de las velocidades residuales que en la variación de la capa de nivel cero.

7. Se ha simulado una situación de afloramiento local dentro de la ría. El modelo reproduce con eficacia el transporte de Ekman. Se comprueba una tendencia a la ascensión de las masas de agua enfrente de las Islas Cíes.

8. Se ha simulado a través del modelo acoplado, la corriente barotrópica en la Ensenada y el Puerto de Bouzas. El submodelo posibilita un mayor refinamiento de la descripción de la hidrodinámica en un área de interés. En este caso, se comprueba el desfase de la elevación de la superficie dentro y fuera del puerto de Bouzas, fenómeno que no es posible detectar con la malla que se ha utilizado para las simulaciones de toda la Ría de Vigo.

Como conclusión general, se establece un modelo válido para la simulación de la hidrodinámica de la Ría de Vigo en función de sus diferentes causas, el cual puede ser fácilmente transportable a otras rías y zonas costeras.

Bibliografía

- Abbott, M.B., A. Damsgaard and G.S. Rodenhuis, 1973. System 21, Jupiter, a design system for two-dimensional nearly-horizontal flows. *J. Hyd. Res.*, **1**, p. 1-28.
- Álvarez-Salgado, X.A., G. Rosón, F.F. Pérez & Y. Pazos, 1993. Hydrographic variability off the Ría Baixas (NW Spain) during the upwelling season. *J. Geophys. Res.*, **98(C8)**, p. 14447-14455.
- Anadón E., F. Saiz & M. López-Benito, 1961. Estudio hidrográfico de la Ría de Vigo - III Parte. *Inv. Pesq.*, **20**, p. 83-130.
- Apel, J.R., 1987. Principles of ocean physics. *International Geophysics Series*, **38**, Academic Press, Londres, 634 pp.
- Arakawa, A. & V.R. Lamb, 1977. Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA General Circulation Model. *Methods of Computational Physics*, **17**, p.174-264.
- Backhaus, J.O., 1983. A semi-implicit scheme for the shallow water equations for application to shelf sea modelling. *Continental Shelf Research*, **2(4)**, p. 243-254.
- Backhaus, J.O. & D. Hainbucher, 1987. A finite general circulation model for shelf and its application to low frequency variability on the North European shelf. *Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics*, J.C.J. Nihoul & B.M. Jamart, Ed., Elsevier Publ. Co., Amsterdam, p. 221-244.
- Batten, M.L., C.N. Lopes da Costa, & C.S. Nelson, 1992. A numerical study of wind stress curl effects on eddies and filaments off the Northwest coast of the Iberian Peninsula. *J. Mar. Syst.*, **3**, p. 249-266.

- Beckers, J.M., 1991. Application of the GHER 3D general circulation model to the Western Mediterranean. *J. Mar. Syst.*, p. 315-332.
- Beckers, J.M., F. Schmitz, P. Brasseur, J.M. Brankart, M. Crépon, Ch. Herbaut, F. Martel, F. Van den Berghe, A. Lascaratos, P. Drakopoulos, N. Pinardi, P. Carini, J. Tintore, A. Álvarez, D. Parrilla, R. Vataurd & S. Speich, 1996. First Annual Report. Mediterranean Models Evaluation Experiment (MEDMEX). Commission of the European Communities, Brussels.
- Bermúdez, A., C. Rodríguez & M.A. Vilar, 1991. Solving shallow water equations by a mixed implicit finite element method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **11**, p. 79-97.
- Bermúdez, A., C. Rodríguez, & M.A. Vilar, 1994. A numerical method for resolution of two-dimensional shallow-water equations. *Revista de Geociências*, **8**, Univ. Lisboa, p. 63-66.
- Bermúdez, A., A. Dervieux, J.A. Desideri & M.E. Vázquez, 1998. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **155**, p. 49-72..
- Blanton, J.O., L.P. Atkinson, F.F. Castillejo, & A. Lavín-Montero, 1984. Coastal upwelling off the Rias Bajas, Galicia, Northwest Spain I: Hydrographic studies. *Rapp. P.- v. Rèun. Cons. Int. Explor. Mer.*, **183**, p. 79-90.
- Blanton, J.O., K.R. Tenore, F. Castillejo, L.P. Atkinson, F.B. Schwing & A. Lavín, 1987. The relationship of upwelling to mussel production in the rias on the western coast of Spain. *J. Mar. Res.*, **45**, p. 497-511.
- Blumberg, A.F. & G.L. Mellor, 1983. Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight. *J. Geophys. Res.*, **88**, p. 4579-4592.
- Blumberg, A.F. & L.H. Kantha, 1984. An open boundary condition for circulation models. *J. Hydraulics Eng.*, ASCE.

- Cameron, W.M. & D.W. Pritchard, 1963. Estuaries. *The Sea*. M.N. Hill, Ed., Vol. 2, Wiley, New York, p. 306-324.
- Camerlengo, A.L. & J.J. O'Brien, 1980. Open boundary conditions in rotating fluids. *J. Comp. Phys.*, **35**, p. 12-35.
- Castro, C.G., F.F. Pérez, X.A. Álvarez-Salgado, G. Rosón & A.F. Ríos, 1994. Hydrographic conditions associated with the relaxation of an upwelling event off the Galician coast (NW Spain). *J. Geophys. Res.* **99(C3)**, p. 5135-5147.
- Crépon, M., 1993. Initiation à la dynamique de l'océan. *Oceanis*, Vol. 19, Fasc. 2, Institut Océanographique, 110 pp., Paris.
- Chaes, J., 1975. Wind-driven circulation in a Spanish estuary. *Estuarine and Coastal Marine Science*, **3**, p. 303-310.
- Datos Instituto Español de Oceanografía, 1997. *Estudio: Ordenación integral del espacio marítimo terrestre de Galicia* Consellería de Pesca, Acuicultura e Marisqueo, Xunta de Galicia.
- Davies, J.H., 1964, A morphogenetic approach to world shorelines. *Z. Geomorphol.* **8**, p.127-131.
- Doodson, A.T. & H.D. Warburg, 1941 (1961). Admiralty manual of tides. Her Majesty's Stationary Office, 270 pp., London.
- Doval, M.D., E. Nogueira & F.F. Pérez, 1998. Spatio-temporal variability of the thermohaline and biogeochemical properties and dissolved organic carbon in a coastal embayment affected by upwelling: the Ría de Vigo (NW Spain). *J. Mar. Syst.*, **14**, p. 135-150.
- Durán, M., F. Saiz, M. López-Benito & R. Margalef, 1956. El fitoplacton de la Ría de Vigo de abril de 1954 a junio de 1955. *Inv. Pesq.*, **4**, p. 67-98.
- Dyer, K.R., 1997. Estuaries; a physical introduction-2nd ed., John Wiley & Sons, 195 pp., Chichester.

- Elvius, T. & A. Sundström, 1973. Computationally efficient schemes and boundary conditions for a fines mesh barotropic model based on the shallow water equations. *Tellus*, **25**, p. 132-156.
- Falconer, R.A., 1984. A mathematical model study of the flushing characteristics of a shallow tidal bay. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2*, **77**, p.311-332.
- Fischer, H.B., 1972. Mass transport mechanism in partially stratified estuaries. *J. Fluid. Mech.* **53**, p. 672-687.
- Fletcher, C.A.J., 1991. Computational techniques for fluid dynamics. Volume I. 2nd Edition. *Springer Series in Computational Physics*, Springer-Verlag, 401 pp., New York.
- Fraga, F., 1967. Hidrografía de la Ría de Vigo, 1962 con especial referencia a los compuestos de nitrógeno. *Inv. Pesq.* **31(1)**, p. 145-159.
- Fraga, F. & R. Margalef, 1979. Las Rías Gallegas. *Estudio y Explotación del Mar en Galicia*. Cursos y Congresos, Universidad de Santiago de Compostela, p. 101-122.
- Fraga, F., 1981. Upwelling off the Galician coast, Northwest Spain. *Coastal Upwelling*. F.A. Richards, ed., Am. Geoph. Union, Washington, p. 176-182.
- Fraga, F. & R. Prego, 1989. Condiciones hidrográficas previas a la purga de mar. *Cuadernos da Área de Ciencias Mariñas, Seminario de Estudos Galegos*, **4**, Edicións do Castro, A Coruña, p. 21-44.
- Fraga, S., D.M. Anderson, I. Bravo, B. Reguera, K.A. Steindiger & C.M.Yentsch, 1988. Influence of upwelling relaxation on dinoflagellates and shelfish toxicity in Ría de Vigo. *Est. Coast. Shelf Sci.*, **27**, p. 349-361.
- Frisch, U., 1995. Turbulence: A legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge University Press. 296 pp., Cambridge.

- Galperin, B., L.H. Kantha, S. Hassid & A. Rosati, 1988. A quasi-equilibrium turbulent energy model for geophysical flows. *J. Atmos. Sci.*, **45**, p. 55-62.
- Galperin, B. & G.L. Mellor, 1990. A time-dependent, three-dimensional model of the Delaware Bay and River system. Part 1: Description of the model and tidal analysis. *Est. Coast. Shelf Sci.*, **31**, p. 231-253.
- Gómez- Gesteira M., P. Montero, R. Prego, J.J. Taboada, R.J.J. Neves & V. Pérez-Villar, 1999. A two-dimensional particle tracking model for pollution dispersion in A Coruña and Vigo Rias (NW, Spain). *Oceanologica Acta*, **22(2)**, p. 167-177.
- Haltiner, G.J. & R.T. Williams, 1980. Numerical weather prediction and dynamic meteorology. 2nd Ed. John Wiley & Sons. 477 pp. New York.
- Hansen, D.V. & M. Rattray Jr., 1966. New dimensions in estuary classification. *Limnol. Oceanog.* **11**, p. 319-326. .
- Hasse, L., 1974. On the surface to geostrophic wind relationship at sea and the stability dependence of the resistance law. *Beitr. Phys. Atmos.*, **47**, p. 45-55.
- Heaps, N.S., 1969. A two dimensional model. *Phi. Transl. Roy. Soc. London*, **A265**, p.93-137.
- Hirsch, C, 1988. Numerical computation of internal and external flows. Vol. I: Fundamentals of numerical discretization. *Wiley Series in Numerical Methods in Engineering*. John Wiley & Sons, 515 pp., Chichester.
- Hsu, S.A., 1986. Correction of land-based wind data for offshore applications: a further evaluation. *J. Phys. Ocean.*, **16**, p. 390-394.
- Iglesias, M.L., N. González, J.M. Cabanas & T. Nunes, 1984. Condiciones oceanográficas de las Rías Bajas gallegas y de la plataforma adyacente. *Cuadernos da Área de Ciencias Mariñas, Seminario de Estudos Galegos*, **1**, Edicións do Castro, A Coruña, p. 107-118.

- Instituto Hidrográfico de la Marina, 1989. Carta Marina 9240. Ría de Vigo. 11ª Impresión. Cádiz.
- Instituto Hidrográfico de la Marina, 1989. Carta Marina 9242. Ría y Puerto de Vigo. 7ª Impresión. Cádiz.
- Israeli, M. & S.A. Orszag, 1981. Approximation of radiation boundary condition. *J. Comp. Phys.*, **41**, p. 115-135.
- James, I.D., 1987. A general three-dimensional model eddy-resolving model for stratified seas. *Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics*, J.C.J. Nihoul & B.M. Jamart, Ed., Elsevier Publ. Co., Amsterdam, p. 305-336.
- Kjerfve, B. & B. Knoppers, 1991. Tidal choking in a coastal lagoon. *Tidal hydrodynamics*, B.B. Parker, ed., John Wiley & Sons, New York, p. 169-181.
- Kowalik, Z. & T.S. Murty, 1993. Numerical modeling of ocean dynamics. *Advanced Series on Ocean Engineering*, **5**, World Scientific, 481 pp., Singapore.
- Kundu, P.K., 1990. Fluid Mechanics. Academic Press, Londres, 638 pp.
- Large, W.G. & S. Pond, 1981. Open ocean momentum flux measurement in moderate to strong winds. *J. Phys. Ocean.*, **11**, p. 324-336.
- Leendertsee, J.J., 1967. Aspects of a computational model for long water wave propagation. *Rand Corporation, Memorandum RH-5299-RR*, Santa Monica.
- Leendertsee, J.J., 1970. A water quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas. *Rand Corporation, Memorandum RM-6230-RC*, Santa Monica.
- Leendertsee, J.J. & Liu, S.K., 1978. A three-dimensional turbulent energy model for non-homogeneous estuaries and coastal sea systems. *Hydrodynamics of Estuaries and Fjords*, J.C.J. Nihoul Ed., Elsevier Publ. Co., Amsterdam, p. 387-405.

- Margalef, R., 1956. Estructura y dinámica de la purga de mar en la Ría de Vigo. *Inv. Pesq.*, **5**, p.113-134.
- Margalef, R. & B. Andreu, 1958. Componente vertical de los movimientos del agua en la Ría de Vigo y su posible relación con la entrada de la sardina. *Inv. Pesq.*, **11**, p.105-126.
- Martins, F., 1999. Modelação matemática tridimensional de escoamentos costeiros e estuarinos usando uma abordagem de coordenada vertical genérica. Tese de doutoramento. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 285 pp., Lisboa.
- Martins, F., R. Neves & P. Leitão, 1998. A three-dimensional hydrodynamic model with generic vertical coordinate. *Proceedings de Hydroinformatics'98*, Vol. 2, V. Babovic & L. C. Larsen Ed., Balkema, Rotterdam, p. 1403-1410.
- McClain, C.R., S. Chao, L.P. Atkinson, J.O. Blanton & F. Castillejo, 1986. Wind-driven upwelling in the vicinity of Cape Finisterre, Spain. *J. Geophys. Res.*, **91(C7)**, p. 8470-8486.
- Mellor, G.L., & T. Yamada, 1982. Development of a turbulent closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys.*, **20**, p. 851-875.
- Molina, 1972. Contribución al estudio del "upwelling" frente a la costa noroccidental de la península Ibérica, *Bol. Inst. Esp. Oceanog.*, **152**, p. 1-39.
- Montero, M., A. Lloret, & A. Ruiz-Mateo, 1992. Water renovation rate in Bouzas basins. *Hydraulic and environmental modelling: Coastal Waters*. R.A. Falconer *et al.*, eds., **1**, p. 263-276.
- Montero, P., R. Prego, M. Gómez-Gesteira, R. Neves, J.J. Taboada, & V. Pérez-Villar, 1997. Aplicación de un modelo 2D al transporte de partículas en la bahía de A Coruña. *Procesos Biogeoquímicos en Sistemas Costeros Hispano-Lusos. VIII Seminario Ibérico de Química Marina*, Prego R. & J.M. Fernández, eds. Excm. Diputación de Pontevedra, Pontevedra, p. 131-136.

- Montero, P., M. Gómez- Gesteira, J.J. Taboada, M. Ruiz-Villarreal, R.J.J. Neves, R. Prego & V. Pérez-Villar, 1999. On residual circulation of Vigo Ria using a 3D baroclinic model. *Bol. Inst. Esp. Oceanogr.*, in press.
- Mouriño, C. & F. Fraga, 1982. Hidrografía de la Ría de Vigo, 1976–1977. Influencia anormal del río Miño. *Inv. Pesq.*, **46**, p. 459-468.
- Mouriño, C., F. Fraga & F. Fernández Pérez, 1984. Hidrografía de la Ría de Vigo, 1979-80. *Cuadernos da Área de Ciencias Mariñas, Seminario de Estudos Galegos*, **1**, Edicións do Castro, A Coruña, p. 91-103.
- Munk, W.H. & E.R. Anderson, 1948. Notes on the theory of the thermocline. *J. Mar. Res.*, **7**, p. 276-295.
- Neves, R.J.J., 1985. Étude expérimentale et modélisation mathématique des circulations transitoire et résiduelle dans l'Estuarie du Sado. Ph.D. Thesis, Université de Liège, Belgique.
- Nichols, M.M. & R.B. Biggs, 1985. Estuaries. *Coastal Sedimentary Environments*, R.A. Davis, ed., Springer-Verlag, New York, p. 77-186.
- Nihoul, J.C.J., 1977. Modèles mathématiques et dynamique de l'environnement. ELE. Liege.
- Nihoul, J.C.J., 1982. Oceanography of semi-enclosed seas. *Hydrodynamics of Semi-Enclosed Seas*. J.C.J. Nihoul, Ed., Elsevier Publ.Co., Amsterdam, p. 1-34.
- Nihoul, J.C.J., 1984. A three-dimensional general marine circulation model in a remote sensing perspective. *Annales Geophysicae*, **2(4)**, pp. 433-442.
- Nihoul, J.C.J., F. Waleffe & S. Djenidi, 1986. A 3D-numerical model of the Northern Bering Sea. *Environ. Software*, **1**, p. 76-81.

- Nihoul, J.C.J. & J.M. Beckers, 1989. Preliminary results of a three-dimensional model of the Western Mediterranean's general circulation. *EROS 2000. First Workshop on the North-West Mediterranean Sea*, J.M. Martin & H. Barth, Ed. Water Pollution Research Report, **13**, Brussels, p. 7-26.
- Nogueira, E., F.F. Pérez & A.F. Ríos, 1997. Seasonal pattern and long-term trends in an estuarine upwelling ecosystem (Ría de Vigo, NW Spain). *Est. Coast. Shelf Sci.*, **44**, p. 285-300.
- Nombela, M.A., 1989. Oceanografía y sedimentología de la Ría de Vigo. Th. Doc., Universidad Complutense de Madrid, pp. 292 (Vol.I), 161 (Vol. II), Madrid.
- Nombela, M.A., F. Vilas, & I. Alejo, 1989. Balance de las partículas finas que alcanzan la Ensenada de San Simón, Ría de Vigo, (Galicia). Actas del XII Congreso de Sedimentología, p. 136-139.
- Nombela, M.A. & F. Vilas, 1991. Datos hidrográficos de la desembocadura de los ríos Oitabén y Redondela, Ensenada de San Simón (Ría de Vigo). *Thalassas*, **9**, p.31-36.
- Nombela, M.A., F. Vilas, I. Alejo, S. García-Gil, B. Rubio & O. Pazos, 1992. Oceanografía del transecto: Isla de San Simón-Muelle de San Adrián. Ensenada de San Simón (Ría de Vigo), NO de España. *Thalassas*, **10**, p. 77-88.
- Nonn, H., 1966. Les régions cotières de la Galice (Espagne). Etude géomorphologique. Ph.D. Thesis, Pub. Fac. Lettres. Univ. Strasbourg, 591 pp., Strasbourg.
- Oberhuber, J.M., 1986. About some numerical methods used in an ocean general circulation model with isopycnic coordinates. *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling*, J.J. O'Brien, Ed., p. 511-522.
- Oey, L.Y. & P. Chen, 1992. A nested-grid ocean model: with application to the simulation of meanders and eddies in the Norwegian Coastal Current. *J. Geoph. Res.*, **97**, p. 20063-20086.

- Okubo, A., 1974. Some speculations on oceanic diffusion diagrams. *Rapp. P. -v. Réun. Cons. Int. Explor. Mer.*, **167**, p. 77-85.
- Orlanski, J., 1976. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comp. Phys.*, **21**, p 251-269.
- Otto, L., 1975. Oceanography of the Ría de Arosa (NW Spain). *Koninklijk Ned. Meteor. Inst. Mededelingen en Verhandelingen*, **96**, 210 pp.
- Ozmidov, R.V., 1990. Diffusion of contaminants in the ocean. *Oceanographic Sciences Library*, Kluwer Academic Publ., 283 pp., Dordrecht.
- Pascual, J.R., 1987a. The vertical and horizontal M2 tide in the Ría de Arosa (Galicia, Spain NW). *Rev. de Geofísica*, **43**, Univ. Complutense Madrid, p. 57-64.
- Pascual, J.R., 1987b. Un modelo de circulación inducida por el viento en la Ría de Arosa. *Bol. Inst. Esp. Oceanogr.*, **4**, p. 107-120.
- Pazó, X.P., X.M. Romarís, F. Fdez.-Cortes & E.R. Moscoso, 1984. Salinidade e temperatura das augas da Ensenada de Baiona (Ría de Vigo) dende Novembro de 1978 até Agosto de 1981. *Cuadernos da Área de Ciencias Mariñas, Seminario de Estudos Galegos*, **1**, Edicións do Castro, A Coruña, p. 139-149.
- Pedlosky, J., 1987, Geophysical fluid dynamics. Second edition. Springer, 710 pp., New York.
- Perkins, A.L., L.F. Smedstad, D.W. Balke, G.W. Heburn & A.J. Wallcraft, 1997. A new nested boundary condition for a primitive equation ocean model. *J. Geophys. Res.*, **102**, p. 3483-3500.
- Phillips, N.A., 1957. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteorol.*, **14**, p.184-185.
- Pielke, R.A., 1984. Mesoscale meteorological modeling. Academic Press, 612 pp., Orlando.

- Pond, S. & G.L. Pickard, 1983. Introductory dynamical oceanography. Second edition. Pergamon Press, 329 pp., Oxford.
- Prego, R., F.F. Pérez, A.F. Ríos, F.Fraga & F.G. Figueiras, 1988. Datos hidrográficos de la Ría de Vigo: 1986. *Datos Informativos. Instituto de Investigaciones Marinas*, **23**, 105 pp., Vigo.
- Prego, R., F. Fraga & A.F. Ríos, 1990. Water interchange between the Ría of Vigo and the coastal shelf. *Scient. Mar.* **54(1)**, p. 95-100.
- Prego, R. & F. Fraga, 1992. A simple model to calculate the residual flows in a Spanish Ría. Hydrographic consequences in the Ría of Vigo. *Est. Coast. Shelf Sci.*, **34**, p. 603-615.
- Pritchard, D.W., 1952, Estuarine hidrography. *Adv. Geophys.* **1**, p. 243-280.
- Pritchard, D.W., 1989. Estuarine classification - A help or a hindrance. *Estuarine Circulation*, B.J. Neilson, A.Kuo & J. Brubaker, ed., Clifton, p. 1-38.
- Richthofen von, F., 1886. Führer für Forschungsreisende. 734 pp., Hannover, Jenecke.
- Ríos, A.F., F.F. Pérez & F. Fraga, 1992. Water masses in the upper and middle North Atlantic Ocean east of the Azores. *Deep-Sea Res.* **39(3/4)**, p. 645-658.
- Rodi, W., 1980. Turbulence models for enviromental problems. *Prediction methods for turbulents flows*, W. Kollman, Ed., Hemisphere Publ. Co., Washington, p. 305-336.
- Rodi, W., 1987. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified flows. *J. Geophys. Res.*, **92**, p. 5305-5328.
- Røed, L.P. & C.K. Cooper, 1986. Open boundary conditions in numerical ocean models. *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling*, J.J. O'Brien, Ed., NATO ASI Series C, **186**, D. Reidel Publ. Co. p. 411-436.

- Røed, L.P. & C.K. Cooper, 1987. A study of various open boundary conditions for wind-forced barotropic numerical ocean models. *Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics*, J.C.J. Nihoul & B.M. Jamart, Ed., Elsevier Publ. Co., Amsterdam, p. 305-336.
- Romero, B. & R. Prego, 1995. La Ensenada de San Simón: características generales de una cuenca costera. *Monografías de Química Oceanográfica* Vol. 1, p. 35-61.
- Rossby, C.G. & R.B. Montgomery, 1935. The layer of frictional influence in wind and ocean currents. *Papers in Physical Oceanograf. and Meteor.*, **3**, p. 1-101.
- Saiz, F., M. López-Benito & E. Anadón, 1957. Estudio hidrográfico de la Ría de Vigo. *Inv. Pesq.*, **8**, p. 29-87.
- Saiz, F., M. López-Benito & E. Anadón, 1961. Estudio hidrográfico de la Ría de Vigo - II Parte. *Inv. Pesq.*, **18**, p. 97-133.
- Santos, A.J.P. & R.J.J. Neves, 1991. Radiative artificial boundaries in ocean barotropic models. *Computer Modelling in Ocean Engng., 1991*. A.S. Arcilla, M. Pastor, O.C. Zienkiewicz & B.A. Schrefler, eds. Balkema, Rotterdam, p. 373-383
- Santos, A.J.P., 1995. Modelo hidrodinâmico tridimensional de circulação oceânica e estuarina. Tese de doutoramento. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 273 pp., Lisboa.
- Simmons, H.B., 1955. Some effects of upland discharge on estuarine hydraulics. *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.* **81**, No. 792.
- Smith, S.D., 1974. Eddy flux measurements over Lake Ontario. *Boundary Layer Meteorolgy*, in Brockx Memorial Volume.
- Spall, M.A. & W.R. Holland, 1991. A nested primitive equation model for oceanic applications. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, p. 205-220.

- Stelling, G.S., 1983. On the construction of computational methods for shallow water flow problems. Ph.D. Thesis, Technische Hoogeschool to Delft.
- Taboada, J.J., R. Prego, M. Ruiz-Villarreal, M. Gómez-Gesteira, P. Montero, A.P. Santos, & V. Pérez-Villar, 1998. Evaluation of the seasonal variations in the residual circulation in the Ría of Vigo (NW Spain) by means of a 3D baroclinic model. *Est. Coast. Shelf Sci.*, **47(5)**, p. 661-670.
- Terán, M., L. Solé Sabaris *et al.* 1978. Geografía general de España. Vol 1, Ariel, 594 pp., Barcelona.
- Tenore, K.R., L.F. Boyer, R.M. Cal, J. Corral, C. García-Fernández, N. González, E. González-Gurriarán, R.B. Hanson, J. Iglesias, M. Krom, E. López-Jamar, J.M. McClain, M.M. Pamatmat, A.A. Pérez, D.C. Rhoads, G. Santiago, J. Tietjen, J. Westrich & H.L. Windom, 1982. Coastal upwelling in the Rías Bajas, NW Spain: contrasting the benthic regimes of the Rías de Arosa and de Muros. *J. Mar. Res.* **40(3)**, p. 701-772.
- Tilstone, G.H., F.G. Figueiras & F. Fraga, 1994. Upwelling-downwelling sequences in the generation of red tides in a coastal upwelling system. *Mar. Ecol. Prog. Ser.*, **112**, p. 241-253.
- UNESCO, 1981. Tenth report of the joint panel on oceanographic tables and standards. *UNESCO technical papers in marine science* N.36, p. 24.
- Vergara, J. & R. Prego, 1997. Estimación de los aportes fluviales de nitrato, fosfato y silicato hacia las Rías Gallegas. *Procesos Biogeoquímicos en Sistemas Costeros Hispano-Lusos. VIII Seminario Ibérico de Química Marina*, Prego R. & J.M. Fernández, eds. Excma. Diputación de Pontevedra, Pontevedra, p. 33-40.
- Vinokur, M., 1989. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws. *J. Comp. Phys.*, **81**, p. 1-52.
- Wilson, B.W., 1966. Note on surface wind stress over water at low and high wind speed. *J. Geophys. Res.*, **65**, p. 3377-3382.

White, F.M., 1994. Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 736 pp., Singapore.

Wooster, W.S., A. Bakun & D.R. McLain, 1976. The seasonal upwelling cycle along the eastern boundary of the North Atlantic. *J. Mar. Res.*, **34(2)**, p.131-142.

Notación

Símbolos

a	Amplitud de onda
a	Amplitud del armónico M_2
A	Función polinomial de S y T
A	Viscosidad cinemática turbulenta
A_H	Viscosidad cinemática turbulenta horizontal
A_V	Viscosidad cinemática turbulenta vertical
A_H	Valor impuesto para la viscosidad cinemática turbulenta horizontal en un cálculo
A_V	Valor impuesto para la viscosidad cinemática turbulenta vertical en un cálculo
AU	Área de la célula de presión donde se calcula U
AV	Área de la célula de presión donde se calcula V
AZX	Área que atraviesa la célula de presión por el centro en el plano zx
AZY	Área que atraviesa la célula de presión por el centro en el plano zy
b	Ancho de un estuario
b	Nodo en la frontera
b	Valor de la anchura impuesta en un canal de prueba
B	Función polinomial de S y T
c_p	Calor específico del agua a presión constante
c^s	Salinidad en la superficie

c_{da}	Valor impuesto del coeficiente de arrastre del viento en un cálculo
c_{dw}	Valor impuesto del coeficiente de arrastre del fondo en un cálculo
C	Constante de la ecuación de los 4/3
C	Velocidad de fase de la onda
C_{10}	Coefficiente de arrastre del viento
C_3, C_4, C_5	Constantes para el cálculo de la viscosidad cinemática turbulenta vertical
C_m	Rugosidad de Manning
C_S	Velocidad de relajación de la salinidad al valor climático
C_T	Velocidad de relajación de la temperatura al valor climático
C_x, C_y	Componentes de fase en la dirección x_1 y x_2
dt	Paso temporal
DUX	Largo del volumen de cálculo de la presión por el centro
DUY	Distancia entre dos puntos de cálculo de U en la dirección x_2
DUZ	Distancia vertical entre dos puntos contiguos de cálculo de U
DVY	Ancho del volumen de cálculo de la presión por el centro
DYY	Ancho del volumen de cálculo de U por el centro
DZE	Altura del volumen de cálculo de U por el centro
DZX	Largo del volumen de cálculo de la U contigua por el centro
e	Energía interna
$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$	Vectores unidad en las direcciones 1, 2, 3
f	Valor impuesto en una frontera
f	Parámetro de Coriolis ($=2W \sin f$)
f	Valor del parámetro de Coriolis impuesto en un cálculo
F	Coefficiente de forma
F	Función de extrapolación

\bar{F}	Flujo de un escalar a través de la superficie del volumen de control
F_S	Fuentes y sumideros de la salinidad
F_T	Fuentes y sumideros de la temperatura
F_L^a	Flujo de vapor de agua hacia la atmósfera al nivel de la superficie libre
F_p^a	Flujo global de precipitación-evaporación
F_T^a	Flujo de calor sensible hacia la atmósfera al nivel de la superficie libre
F_u	Número adimensional utilizado en el cálculo de la superficie libre
$F_x^{adv}, F_x^{bc}, F_x^{cor}, F_x^{dif}$	Términos explícitos en la dirección x_1
	correspondientes a los forzamientos advectivos, baroclínico, de Coriolis y difusión horizontal
$F_y^{adv}, F_y^{bc}, F_y^{cor}, F_y^{dif}$	Términos explícitos en la dirección x_2
	correspondientes a los forzamientos advectivos, baroclínico, de Coriolis y difusión horizontal
g	Aceleración de la gravedad
h	Profundidad media del estuario
h	Valor de la profundidad impuesta en un canal de prueba
H	Altura de la columna de agua ($=h+h$)
$HMIN$	Altura mínima bajo la cual el fondo descubre
$HMIN$	Altura mínima bajo la cual no se calcula el transporte de T y S
HT_u	Altura de la columna de agua en el punto de cálculo de U
i	Numeración de la fila de un nodo en la malla

j	Numeración de la columna de un nodo en la malla
k	Numeración de la altura de un nodo
k	Fuerza másica
k	Energía turbulenta
K	Inverso del coeficiente de expansión volumétrica
$kmax$	Capa superior
K_H	Coefficiente de difusión turbulenta horizontal
K_V	Coefficiente de difusión turbulenta vertical
K_0	Función polinomial de S y T
l	Valor de la longitud impuesta en un canal de prueba
l_m	Longitud de mezcla
L	Escala característica de la turbulencia
L_e	Calor latente de evaporación
M_p	Frecuencia de Prandlt
\vec{n}	Vector normal a la superficie lateral
p	Presión
p_{atm}	Presión atmosférica
q	Flujo de calor por unidad de área
q_w	Caudal arrastrado por el viento
q_{w_x}, q_{w_y}	Componentes del caudal arrastrado por el viento en las direcciones x_1, x_2
Q	Fuentes volúmicas
Q	Caudal
Q_r	Caudal impuesto en la frontera
Q_x, Q_y	Componentes del caudal en las direcciones x_1, x_2
r	Coefficiente de arrastre del fondo
r_u	Coefficiente de arrastre del fondo en el cálculo de U
R	Residuo (en el análisis armónico)
R_h	Radio hidráulico

R_i	Número de Reynolds
R_{ij}	Tensor de esfuerzos de Reynolds
Ri_e	Número estuárico de Richardson
S	Salinidad
$\langle S \rangle$	Salinidad media en profundidad
\bar{S}	Superficie del volumen de control
S_C	Valor climatológico de la salinidad
S_{zz}	Coordenada vertical de una capa en coordenadas cartesianas
SZZ	Profundidad del punto de cálculo de la presión desde un nivel de referencia
t	Tiempo
T	Temperatura
T	Período
T	Tiempo total en una simulación
T_C	Valor climatológico de la temperatura
TIU	Términos explícitos en la ecuación del cálculo de la velocidad
u	Velocidad instantánea (media de Reynolds) en la dirección x_1
U	Escalar
U	Velocidad media en la dirección x_1
U_i	Velocidad media en la dirección x_i
u_f	Velocidad media en una sección
u_i	Velocidad instantánea en la dirección x_i
u_i	Velocidad instantánea (media de Reynolds) en la dirección x_i
u'_i	Parte turbulenta de la velocidad instantánea en la dirección x_i
u_R	Velocidad residual

u_s	Velocidad en la superficie
u_t	Velocidad media de la corriente de marea
$ufluxU, ufluxV, ufluxW$	Flujos en la dirección x_1, x_2, x_3 en las caras de la célula de cálculo de U
v	Velocidad instantánea (media de Reynolds) en la dirección x_2
\vec{v}	Vector velocidad
v_p	Volumen específico a la presión p
$ \vec{v}_u $	Módulo de la velocidad horizontal en el punto de cálculo de U
V	Velocidad media en la dirección x_2
\vec{V}_{10}	Velocidad del viento a 10 m de altura sobre la superficie libre
\vec{V}_t	Velocidad media en profundidad o velocidad calculada más cercana al fondo
V_u	Volumen del volumen del cálculo de U
V_v	Volumen del volumen del cálculo de V
V_z	Volumen del volumen del cálculo de la presión
\vec{V}_H	Velocidad horizontal en el punto de cálculo de la viscosidad turbulenta
V_w	Valor impuesto a la velocidad del viento en un cálculo
w	Velocidad instantánea (media de Reynolds) en la dirección x_3
w^*	Velocidad provisional en la dirección x_3
$wfluxU, wfluxV, wfluxW$	Flujos en la dirección x_1, x_2, x_3 en las caras de la célula de cálculo de W
W	Velocidad media en la dirección x_3
W^*	Velocidad provisional media en la dirección x_3

x, y	Ejes de coordenadas en el plano horizontal
X	Términos explícitos en la dirección x_1 en la ecuación de la elevación de la superficie libre
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$	Coordenadas transformadas
x_1, x_2, x_3	Ejes de coordenadas
Y	Términos explícitos en la dirección x_2 en la ecuación de la elevación de la superficie libre
z	Ejes de coordenadas en vertical
z	Distancia al fondo en el cálculo del coeficiente de arrastre
z_0	Rugosidad característica
$zfluxU, zfluxV, zfluxW$	Flujos en la dirección x_1, x_2, x_3 en las caras de la célula de cálculo de la presión
$Z_{u_{ijk}}$	Profundidad del punto de cálculo U_{ijk}

Símbolos griegos

a	Constante de proporcionalidad
b	Función de relación entre la viscosidad turbulenta vertical y difusividad turbulenta vertical de calor y masa
D	Fase relativa
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Valor del paso espacial impuesto en un cálculo en las direcciones x_1, x_2, x_3
Δt	Valor del paso temporal impuesto en un cálculo
DF_l	Diferencia entre los flujos de onda larga absorbida y emitida
DF_s	Diferencia entre los flujos de onda corta absorbida y emitida
Dr	Diferencia de densidad entre el fondo y la superficie
dS	Diferencia de salinidad entre el fondo y la superficie
d	Delta de Nihoul en la función de longitud de mezcla

d_{ij}	Delta de Kronecker
e	Tasa de disipación de la energía turbulenta
g	Factor de modulación entre el esquema <i>upwind</i> – diferencias centrales
gg'	Constantes utilizadas en la función b
f	Variable a transportar
f	Fase
f	Latitud
h	Elevación de la superficie libre encima del nivel de referencia
h_b	Elevación impuesta en la frontera
h_e	Elevación de la onda entrante por la frontera
h_s	Elevación de la onda saliente por la frontera
p	Número Pi
r	Masa específica
r	Densidad
r_0	Densidad de referencia
r_α	Densidad del aire al nivel de la superficie libre
r'	Anomalía de la densidad
$r'_{ijk u_{ijk}}$	Anomalía de la densidad en el punto de cálculo U_{ijk}
t_{bottom}	Tensión de arrastre del fondo
t_{wind}	Tensión de arrastre del viento
t_u <i>bottom</i>	Tensión de arrastre del fondo en el cálculo de U
t_u <i>wind</i>	Tensión de arrastre del viento en el cálculo de U
s	Fuerza superficial de presión y viscosa
s	Coordenada vertical sigma

w	Frecuencia
W	Velocidad de rotación de la Tierra
W	Volumen de control
m	Viscosidad dinámica
k	Constante de Von Karman
x	Función normalizada de la longitud de mezcla
y	Función de estratificación
q_1	Ángulo del eje x_2 con la dirección Norte
q_e	Ángulo de la onda de entrada respecto a la frontera
q_s	Ángulo de la onda de salida respecto a la frontera

Superíndices

'	Variable del campo de perturbaciones turbulentas
0	Referencial de inercia
—	Media en profundidad
Número (t)	Índice de tiempo

Subíndices

0	Valor de referencia
$1,2,3$	Direcciones x_1 , x_2 y x_3 respectivamente
Número (i,j,k)	Índices de situación en la malla